



UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN

INSTITUT DE PHYSIQUE THÉORIQUE

**Corrélation de transformées en ondelettes et
ondes sismiques**

Dissertation présentée en vue de l'obtention du grade de Docteur en Sciences

par

Eddy-Evian Ntirwihisha

Membres du jury :

Pr. J.-P. Antoine (Promoteur)
Dr. I. Mahara (Co-promoteur)
Pr. B. Piraux (Président du jury)
Pr. Ph. Ruelle
Dr. Th. Camelbeeck
Pr. Chr. de Mol
Dr. L. Jacques

Février 2010

Dédicace

A ma très chère épouse Jeanne,
A nos chers enfants, Daussy, Ganix et Sandy

Remerciements

La présente thèse a été élaborée au département de Physique de l'Université catholique de Louvain. Depuis que j'en ai commencé la rédaction, une question "m'accompagnait" tout le temps : Comment mettre le lecteur à l'aise ? J'ai pensé à cela même en voulant écrire les remerciements.

Pour cette raison, j'ai pris l'option de me dégager des sentiers battus pour parler et écrire dans l'abondance du coeur.

En fin de compte, je n'ai pas trouvé d'idée originale, et j'ai compris alors pourquoi on trouve toujours le même récital, ... voilà :

Je tiens tout d'abord à remercier très vivement mon promoteur, Professeur Jean-Pierre Antoine de l'Institut de Physique Théorique (Fyma, UCL, Louvain-la-Neuve, Belgique) d'avoir accepté de diriger ce travail de recherche. Je lui rends un hommage respectueux pour ces cinq années d'encadrement et le rôle délicat de guide qu'il a su accomplir tout au long de ma thèse. Il m'a encouragé à m'engager dans l'exploration du monde des ondelettes. Je lui suis particulièrement reconnaissant d'avoir apporté sa rigueur scientifique et de n'avoir jamais cessé de partager sans limite de son expérience. Il m'a aidé à progresser dans ma réflexion grâce à ses conseils, son esprit critique, sa disponibilité et sa patience, bref toutes qualités humaines requises en ces circonstances. Ces quelques mots ne pourraient suffire pour lui exprimer ma sincère gratitude.

Mes remerciements vont ensuite au personnel de l'Observatoire Royal de Belgique (ORB) et plus particulièrement au Docteur Thierry Camelbeeck, chef de section sismologie à l'ORB pour avoir mis à ma disposition le cadre, les données et le matériel informatique nécessaire pour l'élaboration de la dernière partie de ma thèse. Sa rigueur dans la simplicité, sa clarté et sa constante et vigilante critique m'ont été d'une aide précieuse.

Qu'il me soit également permis de remercier le Professeur Docteur Matthias Holschneider pour son accueil combien chaleureux à l'Institut de Mathématique (Université de Potsdam, Berlin, Allemagne). Il a suscité et m'a fait bénéficier d'intéressantes discussions qui ont largement contribué à l'ouverture de mon esprit scientifique.

Je voudrais aussi saisir cette opportunité pour remercier du fond du coeur, Docteur Ingénieur Christina Lemke de l'Unité Fyma pour sa préoccupation et son apport précieux en programmation sans oublier ses critiques constructives.

Que le Professeur Jean-Pierre Gazeau (Université Paris 7-Denis Diderot, France) trouve mon sentiment de reconnaissance particulière pour la disponibilité dont il a fait montre lors de mon stage de mobilité de Diplôme d'Etudes Approfondies (DEA). De nos contacts et discussions, j'ai appris chez lui le sens de la rigueur dans la démarche scientifique.

Le Professeur Bernard Piroux, Président du Département de Physique, a bien voulu accepter la Présidence du Jury. J'en suis très honoré.

Je tiens également à remercier spécialement les Professeurs Philippe Ruelle, Christine de Mol, Thierry Camelbeeck, Laurent Jacques, Jean-Pierre Antoine et Isidore Mahara pour les remarques pertinentes que j'ai eues de leur part après la première réunion du Jury.

Je serais ingrat de rater cette occasion pour exprimer ma profonde reconnaissance au feu Docteur Canisius Cishahayo qui avait accepté de co-diriger ce travail mais que la maladie a emporté avant de partager le fruit de son aide.

Que le Docteur Isidore Mahara qui a accepté de prendre la relève soit également remercié.

Un hommage mérité va à l'endroit de tous les membres de l'Unité Fyma et aux nombreux amis qui, à des degrés divers, m'ont témoigné sympathie et soutien.

Mes remerciements vont naturellement à la Coopération Technique Belge (CTB) pour le financement de mes années de thèse.

Je ne saurais clore ce chapitre des remerciements sans évoquer le rôle central joué par ma très chère et tendre épouse Jeanne qui, par ses conseils et ses encouragements permanents, m'a donné la force morale nécessaire à l'accomplissement de ma recherche. Sa patience et sa détermination l'ont amenée à s'occuper toute seule et chaque jour, avec talent et amour de l'éducation de nos enfants Daussy, Ganix et Sandy auxquels je souhaite bonne santé et plein bonheur.

Table des matières

Dédicace	ii
Remerciements	iii
1 Introduction générale	1
2 Signaux sismiques	9
2.1 Rappel sur le traitement du signal et échantillonnage	9
2.2 Acquisition de données sismiques	13
2.2.1 Acquisition terrestre	13
2.3 Modélisation du signal sismique	14
2.3.1 Principes de propagation d'ondes sismiques	14
2.3.2 Modèle simplifié	17
2.4 Paramètres des tremblements de terre par l'analyse des ondes sismiques	19
2.5 Localisation	20
2.5.1 Détermination de l'heure origine et de l'hypocentre	20
2.5.2 Formulation du problème de localisation	21
2.6 La grandeur des tremblements de terre	24
2.7 Conclusion	27
3 Analyse temps-fréquence	29
3.1 Notions préalables	29
3.1.1 Mesure	29
3.1.2 Espaces L^p	30
3.2 Transformée de Fourier	32
3.2.1 Discrétisation	36
3.2.2 Implémentation	39

3.3	Transformée de Fourier à court terme	40
4	Analyse continue en ondelettes	45
4.1	Introduction	45
4.2	Transformée continue en ondelettes sur $L^2(\mathbb{R})$	46
4.2.1	Transformée en ondelettes à une dimension	46
4.2.2	Principe	46
4.2.3	La transformée continue en ondelettes CWT	48
4.3	Discrétisation de la CWT	56
4.4	Arêtes et Squelette	59
4.5	Corrélation statistique	60
4.5.1	Introduction	60
4.5.2	Droite et coefficient de corrélation	61
4.5.3	Valeurs moyennes statistiques et temporelles	63
4.5.4	Processus stochastique et ergodique	66
4.5.5	Valeurs moyennes des fonctions de variables aléatoires et coefficient de corrélation	67
4.6	Densité spectrale de puissance	69
4.6.1	Définitions	69
4.6.2	Théorème de Wiener-Khintchine	70
4.7	Corrélation de transformées en ondelettes et la coïncidence	72
4.7.1	Introduction	72
4.7.2	Spectre de puissance de la transformée en ondelettes	72
4.7.3	Analyse croisée de la transformée en ondelettes	73
4.7.4	La coïncidence	73
5	Identification des séismes locaux dans les enregistrements continus des stations du réseau sismique belge	75
5.1	Réseau sismique belge et activité sismique en Belgique	76
5.2	Les données analysées dans ce travail	78
5.3	La mesure des temps d'arrivée par ondelettes	82
5.3.1	Introduction	82
5.3.2	Méthodes existantes	82
5.3.3	Position du problème et choix de l'analyse temps- échelle	83
5.3.4	Estimation des temps d'arrivée et comparaison avec les mesures visuelles	84
5.3.5	Mise en oeuvre de la transformée en ondelettes	85

5.3.6	La mesure des temps d'arrivée et caractéristiques de l'ondelette	87
5.4	Analyse des temps d'arrivée des ondes P et S	92
5.5	Confirmation des critères d'identification des tremblements de terre	99
5.6	Identification automatique des événements sismiques dans les enregistrements continus	100
5.6.1	Spectre croisé entre stations	101
5.6.2	Enregistrement continu du 03-03-2009	101
5.6.3	Coïncidence entre stations	105
6	Conclusion générale	109
	Annexes	113

Chapitre 1

Introduction générale

Une des activités journalières des sismologues est la mesure des temps d'arrivée des différents types d'ondes sismiques. La mesure exacte permet en effet de déterminer avec précision les foyers des séismes et par conséquent de pouvoir donner la configuration des zones du globe terrestre dont les activités sismiques sont intenses. Cela permet aussi de connaître la composition dans le sous-sol des différentes couches géologiques de l'intérieur de la terre et à quelle profondeur elles se trouvent. L'amélioration des méthodes permettant d'avoir des mesures précises ne manque pas donc d'intérêt.

Les méthodes aussi bien théoriques que numériques utilisées en sismologie sont traditionnelles dans ce sens qu'elles sont basées sur la transformée de Fourier [17].

C'est ainsi par exemple que le géophysicien J. Morlet, en se penchant sur l'étude de certains signaux en sismique-réflexion, qui est une méthode de recherche et de prospection pétrolière, s'est rendu compte de l'inefficacité de l'analyse de Fourier et de la méthode de Gabor dans ce domaine. La méthode utilisée par Morlet consistait à émettre un signal vibro-sismique à la surface de la terre, ce qui produisait des ondes de très faible intensité et modulées en fréquence. Ces dernières se propagent dans le sous-sol et sont ensuite réfléchies différemment selon les couches géologiques du sous-sol de la terre. L'analyse de l'écho de ces ondes renseigne sur la composition du sous-sol et la présence éventuelle des couches de pétrole.

Ce fut en 1983 que A. Grossmann et J. Morlet ont proposé l'analyse et la synthèse par les ondelettes [28]. Celles-ci permettent d'analyser efficacement des signaux où coexistent des événements d'échelles très

différentes. Les ondes sismiques sont dans cette catégorie de signaux, ce qui justifie l'utilisation de la transformée en ondelettes pour détecter les temps d'arrivée des différents types d'ondes sismiques.

Le traitement du signal est devenu une composante essentielle de l'activité scientifique et technologique contemporaine. Il est utilisé dans les télécommunications (téléphone, télévision), dans la transmission et l'analyse des images fournies par les satellites, dans l'imagerie médicale (échographie, scanner), tout comme dans l'analyse et l'interprétation de séries temporelles : il pourra s'agir des fluctuations de valeurs boursières, mais également de relevés de températures permettant l'analyse des variations climatiques et de relevés sismiques [24]. Cette liste n'est pas exhaustive.

L'analyse par ondelettes permet de donner une représentation des signaux permettant de faire apparaître simultanément des informations temporelles (localisation dans le temps, durée) et fréquentielles, facilitant par là l'identification des caractéristiques physiques de la source du signal. Les ondelettes n'ont depuis lors cessé de se développer et de trouver de nouveaux champs d'application.

La question importante est la suivante : **Qu'est-ce qu'une ondelette ?** En schématisant à l'extrême, nous dirons qu'une ondelette est l'idéalisation mathématique d'une note de musique. On représente une oeuvre musicale sous forme de séries de notes portées sur une partition, on peut songer à utiliser des notes mathématiques pour représenter certains objets mathématiques, tels des fonctions ou signaux. De même qu'une note de musique est un morceau de son apparaissant à un instant donné, d'une durée donnée, et d'une hauteur donnée, une note mathématique est un objet auquel l'on associe des caractéristiques physiques telles que leur localisation dans le temps, leur durée et leur hauteur [10, 30, 34]. Ces notes mathématiques sont à comparer aux sinusoides sur lesquelles repose l'analyse de Fourier (ou analyse spectrale) usuelle. Dans un certain sens une sinusoides est une note totalement idéalisée, associée à une fréquence *infiniment pure* mais à laquelle l'on ne saurait affecter de notion temporelle précise (d'énergie finie) : une sinusoides n'a ni début ni fin.

L'analyse de Fourier nous enseigne qu'un signal quelconque peut s'écrire comme une somme de telles sinusoides, de fréquences et d'amplitudes variables. Un signal est entièrement caractérisé par l'ensemble des amplitudes des sinusoides, qui forme ce que l'on appelle sa transformée de Fourier. Elle est porteuse de précieuses informations sur le signal ana-

lysé. On sait par exemple que si elle n'a que de faibles valeurs pour des basses fréquences, ceci signifie que le signal varie lentement. Inversément, si elle prend des valeurs importantes pour les hautes fréquences, le signal contient une quantité non négligeable de hautes fréquences et, donc varie rapidement au moins dans certaines zones. Et c'est précisément là que nous touchons du doigt l'une des limitations importantes de l'analyse de Fourier usuelle car elle est incapable de localiser les portions du signal dans lesquelles les variations sont rapides, ni celles où elles sont lentes.

Un prototype d'analyse temps-fréquence avait été proposé au milieu des années 1940 par le physicien D. Gabor qui suggérait de rendre locale l'analyse de Fourier, en s'aidant de fenêtres [19]. Une fenêtre étant une fonction régulière, lentement variable et bien localisée et, en la multipliant avec la fonction étudiée on en obtient une version *locale*, dont on peut déterminer le contenu fréquentiel par analyse de Fourier classique. On renouvelle alors l'opération en déplaçant la fenêtre d'analyse. L'ensemble de ces transformées de Fourier ainsi localisées forme la transformée de Fourier à court terme du signal et fournit donc une *analyse fréquentielle locale*. Signalons toutefois que cette opération est loin d'être innocente. Nous nous heurtons ici à une barrière infranchissable : ce que nous avons gagné en localité, en précision temporelle, est irrémédiablement perdu en précision sur les fréquences [4]. En d'autres termes en cherchant à préciser les notions temporelles, nous avons rendu floues les notions fréquentielles. Cette notion pour limitante qu'elle soit, fait aussi la substance et la saveur de cette nouvelle problématique qu'est l'analyse temps-fréquence : il revient à l'utilisateur de décider quelle est la part de précision temporelle et de précision fréquentielle dont il a besoin.

L'analyse par ondelettes proposée initialement par J. Morlet et A. Grossmann [28] est plus récente (quoique l'on puisse lui trouver des origines aussi anciennes que l'analyse de Fourier à fenêtre), et basée sur un concept quelque peu différent du concept de fréquence : le concept d'échelle. Au lieu de considérer des fonctions oscillantes placées à l'intérieur d'une fenêtre que l'on fait ensuite coulisser le long du signal à analyser, les ondelettes sont déplacées, dilatées et comprimées les unes des autres, copies presque conformes puisqu'elles sont de forme constante et ne diffèrent que par leur taille. La décomposition (continue) en ondelettes est similaire à la décomposition de Gabor : un signal s'écrit sous la forme d'une superposition de telles ondelettes translatées et di-

latées. Cette transformation en ondelettes est donc une fonction de deux variables : le temps et l'échelle (ou dilatation).

Avec l'analyse par ondelettes et l'analyse par Gaborettes, nous disposons donc de deux méthodes de décomposition des signaux en fonctions élémentaires engendrées par des transformations simples d'une fonction de base. La fonction de base est soit translatée et modulée (dans le cas des Gaborettes), soit translatée et dilatée (ondelettes) [8, 9]. La différence fondamentale entre les deux tient précisément à cette opération de dilatation : les ondelettes s'adaptent d'elles-mêmes à la taille des caractéristiques qu'elles recherchent. Elles sont très étendues pour étudier les basses fréquences (les grandes échelles) et très fines pour étudier des phénomènes plus transitoires (hautes fréquences, ou petites échelles). Cette procédure développée par S. Mallat et systématisée par I. Daubechies porte le nom de multi-échelle, introduite par S. Mallat et Y. Meyer et suggère une interprétation différente de l'analyse par ondelettes basée sur les idées de lissage ou d'approximation des fonctions [22, 43, 48].

Mathématiquement, certains chercheurs ont pensé que les ondelettes pourraient supplanter l'analyse de Fourier, un important outil, vieux de presque deux siècles, utilisé notamment dans le développement de la téléphonie ou dans l'audio-visuel. Maintenant on constate que les deux langages se complètent. Un défaut de la transformée de Fourier est de cacher l'information sur le temps : elle nous informe quant au nombre de fréquences contenues dans le signal mais tait l'instant d'émission des diverses fréquences. L'information sur le temps n'est pas perdue mais elle est soigneusement ensevelie sous les phases : les mêmes sinus et cosinus peuvent représenter des moments très différents du signal parce qu'ils sont décalés en phase pour s'amplifier ou s'annuler.

Dans cette optique, il est intéressant de travailler avec un outil qui décompose un signal à la fois en temps et en fréquence : les ondelettes seraient l'équivalent d'une partition pour un signal indiquant non seulement quelles notes (fréquences) on doit jouer mais aussi à quel moment on doit les jouer. D'après Y. Meyer [49] : *à l'inverse de ce qui se passe pour les séries de Fourier, les coefficients d'une série d'ondelettes traduisent de façon simple, précise et fidèle les propriétés des fonctions, du moins les propriétés qui correspondent à une discontinuité, un événement imprévu.*

Nous consacrerons une partie importante à la notion de discontinuité des ondes sismiques en utilisant la transformée continue en ondelettes.

Nous partirons de cette question qui vient à l'esprit : "les décompositions en ondelettes sont-elles capables de détecter des singularités, ne serait-ce que dans des situations nécessairement idéalisées où le signal est moins complexe ?" Ou encore, étant donné un signal produit par un phénomène bien déterminé, peut-on à l'aide d'une transformée en ondelettes accéder à certaines informations relatives à ce phénomène quand il se produit (on peut penser à des applications très pratiques, comme par exemple détecter automatiquement les temps d'arrivée des ondes sismiques) ? Il est bien évident que la réponse est négative dans le cas général puisque l'outil universel n'existe pas. . .

Ceci étant, les décompositions en ondelettes ont quand même permis de répondre par l'affirmative dans nombre de cas précis. Une des problématiques traditionnelles de l'analyse mathématique est de caractériser ce qu'on appelle les propriétés de régularité des fonctions. Très grossièrement, la régularité d'une fonction traduit la rapidité avec laquelle elle varie. Plus précisément, les fonctions sont regroupées en classes (appelées espaces fonctionnels) de fonctions possédant toutes certaines propriétés génériques. Certaines de ces propriétés étant souvent difficiles à vérifier directement, il est souvent nécessaire de les traquer par des moyens détournés. La transformation de Fourier en est un et les fonctions de certaines classes peuvent être caractérisées par les propriétés de leur transformée de Fourier : en schématisant à l'extrême, plus une fonction $f(t)$ varie rapidement (c'est-à-dire moins elle est régulière), plus elle contient de sinusoides $\sin(\omega t)$ et $\cos(\omega t)$ de fréquences ω élevées, et plus sa transformée de Fourier décroît lentement quand la fréquence ω augmente. Par malheur, autant cette idée paraît naturelle intuitivement, autant elle est difficile à traduire dans un contexte mathématiquement rigoureux.

L'un des apports essentiels de l'analyse par ondelettes dans ce contexte a été de montrer que cette idée simple est bien plus correcte quand on la formule en utilisant des ondelettes qu'en utilisant des sinusoides. Plus une fonction est régulière, plus ses coefficients d'ondelettes décroissent vite quand l'échelle décroît et vice versa. Bien entendu, tous les espaces fonctionnels ne peuvent être caractérisés aussi simplement. Le résultat est simplement que l'analyse par ondelettes permet d'en "caractériser" plus que l'analyse de Fourier. Dans un même ordre d'idées, la variable d'échelle des ondelettes permet d'analyser les propriétés de fonctions ou objets fractals, c'est-à-dire se reproduisant à l'identique à des échelles différentes. C'est ainsi que l'on a pu mettre en évidence les propriétés

fractales de certaines fonctions mathématiques comme la célèbre fonction de Riemann-Weierstrass.

Cependant, les atouts des décompositions en ondelettes vont bien au delà de ces propriétés mathématiques. En effet, il s'avère que nombre de fonctions ou signaux que l'on peut rencontrer couramment en pratique, sont efficacement représentés par des ondelettes. Par efficacement, nous entendons que non seulement les coefficients d'ondelettes permettent de *lire facilement* les propriétés de ces signaux mais aussi que cette information est contenue dans un nombre relativement limité de ces coefficients, autrement dit, que seule une petite partie de ces coefficients sont représentatifs tous les autres étant petits. Il est en effet bien plus aisé de manipuler un nombre limité de coefficients qu'un grand nombre.

Dans cette thèse, nous traiterons du problème de l'analyse des données sismiques qui sont des signaux uni-dimensionnels. Ces ondes sont élastiques et peuvent traverser un milieu sans le modifier et se propagent dans toutes les directions [14]. On distinguera les ondes de volume qui traversent la terre et les ondes de surface qui se propagent parallèlement à sa surface. Elles se succèdent et se superposent sur les enregistrements des sismomètres. Leur vitesse de propagation et leur amplitude sont modifiées par les structures géologiques traversées, c'est pourquoi les signaux enregistrés sont la combinaison d'effets liés à la source, aux milieux traversés et aux instruments de mesure. La première partie sera consacrée aux ondes sismiques, la transformée de Fourier et enfin la transformée en ondelettes. Une dernière partie de ce document sera consacrée à l'étude des temps d'arrivée de ces différentes ondes. Nous verrons que la transformée continue en ondelettes utilisée comme outil d'analyse de régularité Hölderienne locale détecte les singularités qui correspondront à ces arrivées, c'est-à-dire des lignes de maxima locaux de la transformée continue en ondelettes.

L'objectif principal de ce travail est donc de montrer que la transformée en ondelettes peut contribuer à l'analyse et au traitement des signaux sismiques. En effet, au cours de cette thèse nous nous intéressons particulièrement à la propagation des ondes sismiques de volume. Comme la transformée en ondelettes a été déjà utilisée pour la détection des temps d'arrivée [17], nous nous proposons alors, en nous référant à [27, 45] une nouvelle alternative basée sur la corrélation de transformées en ondelettes entre les composantes à chaque station et la corrélation entre stations. Aussi avec les spectres de puissance de transformées en ondelettes obtenus pour chaque composante d'une station, on fera les coïnci-

dences de ces spectres qui nous permettront d'identifier l'événement auquel on fait face, à savoir un bruit qui peut être lié à un passage d'un train, d'un piéton, etc. . . ou un événement correspondant réellement à l'arrivée des ondes de volume. Concrètement nous allons traiter les données sismiques de quatre manières à savoir :

- Spectre de puissance de la transformée en ondelettes,
- Spectre croisé de la transformée en ondelettes au sein d'une station,
- Spectre croisé de la transformée en ondelettes entre stations,
- Coïncidence des spectres de puissance des transformées en ondelettes entre différentes stations.

Nous validerons l'intérêt et la performance de notre méthode en comparant les résultats obtenus avec ceux d'autres méthodes existantes.

En ce qui concerne la structure proprement dite de cette thèse, nous évoquerons dans le deuxième chapitre les signaux sismiques que nous traiterons par la transformée en ondelettes. Dans le troisième chapitre, on parlera de l'analyse temps-fréquence ainsi que la transformée de Fourier à Court-Terme pour les signaux 1D.

Nous poursuivrons dans le quatrième chapitre les développements de la transformée continue en ondelettes. La définition de la CWT 1D sera introduite en premier. Les conditions d'admissibilité, les propriétés de covariance seront également établies. Nous étudierons également le lien qui existe entre la régularité Hölderienne locale de fonctions et la décroissance des coefficients en ondelettes pour les lignes de maxima locaux de la CWT.

Le cinquième chapitre sera consacré à l'identification des séismes locaux dans les enregistrements continus des stations du réseau sismique belge pour trouver les temps d'arrivée des ondes de volume [54].

Nous concluons en présentant les performances, les limites de notre approche mais aussi quelques perspectives de cette analyse pour ce travail dans le domaine de l'analyse par ondelettes des données sismiques. Ces signaux géophysiques réels ont été fournis par l'Observatoire Royal de Belgique (**ORB**). Le dernier point sera réservé à la conclusion générale.

Chapitre 2

Signaux sismiques

2.1 Rappel sur le traitement du signal et échantillonnage

Dans ce paragraphe, on présentera quelques éléments fondamentaux du traitement du signal puisque nous nous intéresserons en particulier à l'étude et à l'analyse des signaux sismiques [42].

De façon purement académique, nous pouvons rappeler qu'un signal se définit généralement comme le support physique de l'information. C'est une quantité qui varie au cours du temps (le signal de parole peut être représenté par la variation temporelle d'une pression acoustique, une image est représentée par la variation de niveau de gris de points appelés pixels, un message téléphonique est codé par des variations d'un signal électromagnétique converti à la réception en signal électrique, puis sonore, etc. . .).

Lors de la propagation, le signal est enregistré en général avec un bruit additif provenant de l'environnement, il est alors nécessaire de traiter le signal afin de récupérer l'information transmise.

En général, on a deux types de signaux :

- Le signal déterministe, qui sert de modèle d'étude lorsque l'évolution temporelle est parfaitement connue (passé, présent et futur).
- Le signal aléatoire qui sert de modèle lorsque la description déterministe est impossible (manque de connaissances du phénomène, paramètres imprévisibles, etc. . .)

Dans la suite, nous nous intéresserons aux signaux déterministes uniquement.

Définition 2.1 *Un signal déterministe est un signal dont il est possible de prédire le comportement en ne connaissant qu'une partie de celui-ci, ou s'il peut être reproduit fidèlement et c'est le cas des signaux, par exemple des signaux périodiques, pour lesquels la connaissance d'une période est suffisante pour prédire la suite de leur évolution.*

Un signal est défini comme étant une fonction $X(t)$ réelle (ou complexe) de variable réelle t telle que $X(t)$ est continue ou possède un nombre fini (ou dénombrable) de discontinuités de première espèce (saut de hauteur finie). L'ensemble des ces signaux a une structure d'espace vectoriel et dans cet espace, on définit le produit scalaire [11] :

$$\langle X, Y \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{X(t)} Y(t) dt \quad (2.1)$$

et la norme associée :

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}. \quad (2.2)$$

On rappelle que $X(t)$ est un signal d'énergie finie s'il est de carré sommable, c'est-à-dire si :

$$\int_{\mathbb{R}} |X(t)|^2 dt \text{ converge.} \quad (2.3)$$

La quantité :

$$E_{12} = \int_{t_1}^{t_2} |X(t)|^2 dt$$

peut être interprétée comme l'énergie emmagasinée entre les instants t_1 et t_2 .

Dans la pratique, un signal physique ne peut pas être mesuré à chaque instant comme une fonction continue, car il faudrait une infinité de points, alors que les signaux traités sont des signaux discrets temporellement. Il est donc nécessaire de procéder à un prélèvement séquentiel sélectif que l'on appelle un *échantillon*. Mais le problème fondamental est de savoir si ce dernier représente convenablement le signal initial et d'éliminer dans la mesure du possible les erreurs de mesure. C'est l'objet du théorème fondamental de Shannon-Nyquist.

Désignons par $f(t)$ la fonction du temps t représentant le signal à étudier. Nous désignons par T_e une période de temps qui sera appelée *période d'échantillonnage* (le pas). L'échantillon de f est la suite de valeurs de f aux instants nT_e (voir Figure 2.1).

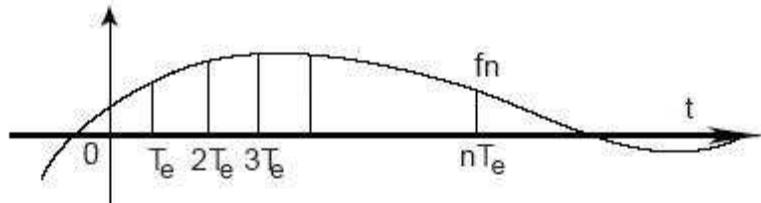


FIGURE 2.1 – Échantillonnage d'une fonction

On pose :

$$f_n = f(nT_e). \quad (2.4)$$

Illustrons la difficulté liée à la période d'échantillonnage sur un exemple simple de la fonction f telle que :

$$f(t) = \cos(2\pi\nu t). \quad (2.5)$$

Si nous choisissons $T_e = \frac{1}{\nu}$, alors

$$f_n = f(nT_e) = \cos(2\pi n) = 1, \quad (2.6)$$

ce qui, bien entendu, ne représente pas correctement la fonction.

Si nous choisissons $T_e > \frac{1}{\nu}$, nous construisons une suite de valeurs f_n qui représentent un tout autre signal.

Nous verrons que le théorème de Shannon nous apprend qu'il faut, au moins, avoir la relation :

$$T_e < \frac{1}{2\nu} \quad (2.7)$$

pour représenter convenablement la fonction f sous réserve qu'elle possède des propriétés convenables.

Définition 2.2 On dit qu'une fonction f est à bande limitée si le support de sa transformée de Fourier est compact dans \mathbb{R} .

Si on prend l'exemple de la fonction f telle que :

$$\hat{f}(\omega) = \chi_{[-A,A]}(\omega), \quad (2.8)$$

fonction caractéristique de l'intervalle $[-A, A]$, $f(t)$ est obtenue par la transformée de Fourier inverse :

$$f(t) = \frac{A \sin(At)}{\pi At}. \quad (2.9)$$

La fonction

$$t \mapsto \text{sinc}(t) = \frac{\sin(At)}{At} \quad (2.10)$$

est appelée sinus cardinal ou ondelette de Shannon associée à la bande de largeur $2A$.

Considérons maintenant un échantillon $f_n = f(nT_e)$ d'une fonction f , on lui associe l'estimation suivante :

$$E(f)(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{\sin(A(t - nT_e))}{A(t - nT_e)} \quad (2.11)$$

Le théorème de Shannon-Nyquist qui est à la base de la conversion numérique des signaux nous dit :

Théorème 2.3 *Soit $f(t)$ une fonction à bande limitée, de bande incluse dans le segment $[-A, A]$, et soit T_e une période d'échantillonnage telle que :*

$$T_e < \frac{\pi}{A}. \quad (2.12)$$

Alors si $f_n = f(nT_e)$ est un échantillon de f , on aura :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{\sin(A(t - nT_e))}{A(t - nT_e)} \quad (2.13)$$

Remarque 2.4 Le théorème de Shannon-Nyquist est l'outil le plus important connu à ce jour de la théorie d'échantillonnage, dans la mesure où il donne un critère nécessaire de choix sur la période d'échantillonnage d'une fonction à bande limitée pour que $E(f)$ approche convenablement f .

La plupart du temps, un échantillon est bruité, c'est-à-dire entaché d'erreurs. Il nous faudra trouver des moyens que nous ne détaillerons pas dans ce travail pour éliminer ces bruits, et pour cela nous pouvons faire appel à la troncature mais celle-ci donne lieu au phénomène de Gibbs qui est en quelque sorte, un *défaut d'approximation* pour une fonction continue de classe C^1 par morceaux, ainsi que les techniques de filtrage.

2.2 Acquisition de données sismiques

Avant de parler de cette partie, il faut préciser quelques points importants :

Premièrement, le signal sismique au sens large est tout signal qui se rapporte non seulement aux séismes, mais à tout ce qui vient du sous-sol. Deuxièmement, les signaux que nous étudierons se présentent sous forme de nombres qui proviennent de mesures que l'on effectue à l'aide d'une méthode d'enregistrement, qui se présentent sous l'aspect d'une fonction du temps (série temporelle).

Une campagne sismique comprend généralement trois étapes : l'acquisition des données, le traitement de l'information et l'interprétation.

2.2.1 Acquisition terrestre

Plusieurs méthodes permettent d'avoir les informations du sous-sol, on citera par exemple des méthodes qui exploitent les phénomènes naturels (séismes, volcans, etc. . .) et des méthodes provoquées [52].

Parmi ces méthodes, la sismique réflexion qui a été utilisée par le géophysicien J. Morlet est très utilisée en prospection pétrolière.

En prospection sismique terrestre, plusieurs types de dispositifs sources-capteurs sont utilisables. Le positionnement des structures géologiques à identifier détermine le type de sismique à utiliser. La sismique de surface (capteurs à la surface du sol) permet d'obtenir une image (échographie) du sous-sol, et dans ce cas l'acquisition terrestre consiste à générer des ébranlements dans le sous-sol par différentes façons : une explosion, un camion vibreur, une chute de poids ou autre et à observer en surface les ondes réfléchies sur les couches géologiques ou réfractées le long de certaines interfaces. Les ébranlements ainsi créés se propagent dans le sous-sol par des ondes progressives, suivant des lois analogues à celles de l'optique. Les angles de leur trajectoire sont calculés suivant les lois de Descartes de l'optique géométrique. Ces ondes donnant naissance à des phénomènes de réflexion et de transmission parviennent aux limites des couches géologiques.

En sismique réflexion, les ondes réfléchies remontent vers la surface où elles sont détectées par des capteurs sensibles à la vitesse de déplacement du sol : les géophones en sismique terrestre.

Certaines ondes peuvent se propager avec un angle égal à l'angle critique, c'est-à-dire, elles se propagent horizontalement sur une certaine distance et remontent ensuite vers la surface et c'est l'objet d'acqui-

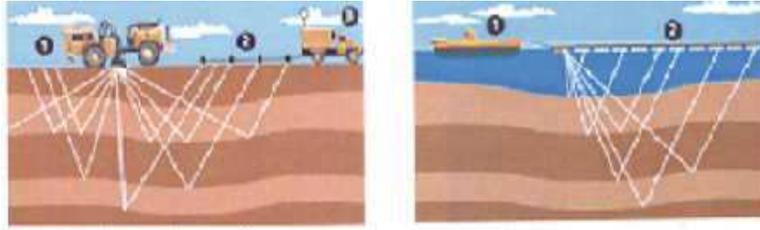


FIGURE 2.2 – Principe d'acquisition sismique terrestre et marine

sition de la sismique réfraction. Il faut noter aussi que les ondes très énergétiques (ondes de surface) se propagent parallèlement à la surface dans ce type d'acquisition (voir Figure 2.2).

Le système d'acquisition de l'information en sismique réflexion comprend essentiellement un dispositif d'émission, un dispositif de détection et un appareil d'enregistrement numérique. Ils sont différents en sismique terrestre et en sismique marine. Pour ce qui est de la sismique marine, on a deux types d'acquisition : la sismique réflexion et la sismique réfraction et le principe est identique à celui de l'acquisition terrestre [53].

2.3 Modélisation du signal sismique

Afin de comprendre la modélisation des signaux sismiques et sans rentrer dans les détails mécaniques et physiques, on rappellera un certain nombre de considérations sur les ondes sismiques et leur propagation. Une telle modélisation tient compte de divers phénomènes accompagnant la propagation de ces ondes à travers les milieux géologiques rencontrés, reflétant des facteurs directement liés aux propriétés du sol qui peuvent être trouvées à partir des données collectées. En effet, la structure du sol influe directement sur la nature des ondes présentes et détermine en partie l'amplitude du signal reçu.

2.3.1 Principes de propagation d'ondes sismiques

Généralement, dans un document sismique de données détectées au niveau des capteurs, on peut observer deux types d'ondes : les ondes de volume qui vont nous intéresser dans la suite et les ondes de surface. Leur vitesse de propagation et leur amplitude sont modifiées par les structures

géologiques qu'elles traversent, et c'est pourquoi les signaux enregistrés sont la combinaison d'effets liés à la source, aux milieux traversés et aux instruments de mesure.

1. Les ondes de volume

Dans un milieu élastique, homogène, isotrope et infini, les ondes qui se propagent sont les ondes de volume. Leur vitesse augmente en général avec la profondeur, car les milieux traversés deviennent plus denses [16].

On distingue :

- L'onde de **compression** ou onde **P** (Pressure) arrive en premier correspond à des vibrations longitudinales qui déplacent les particules parallèlement à la direction de propagation, elle est la plus rapide (6 Km.s^{-1} près de la surface) et se propage à une vitesse V_p . Elle est responsable du grondement sourd que l'on peut entendre au début d'un tremblement de terre.
- L'onde de **cisaillement** ou onde **S** (Shear) arrive en second avec une direction transversale à la direction des rais sismiques. Elle est moins rapide (4.06 Km.s^{-1}) et se propage avec une vitesse V_s .

Le coefficient de Poisson calculé à partir du rapport V_p/V_s , permet d'obtenir des informations sur les propriétés physiques des roches (voir Figure 2.4) [26].

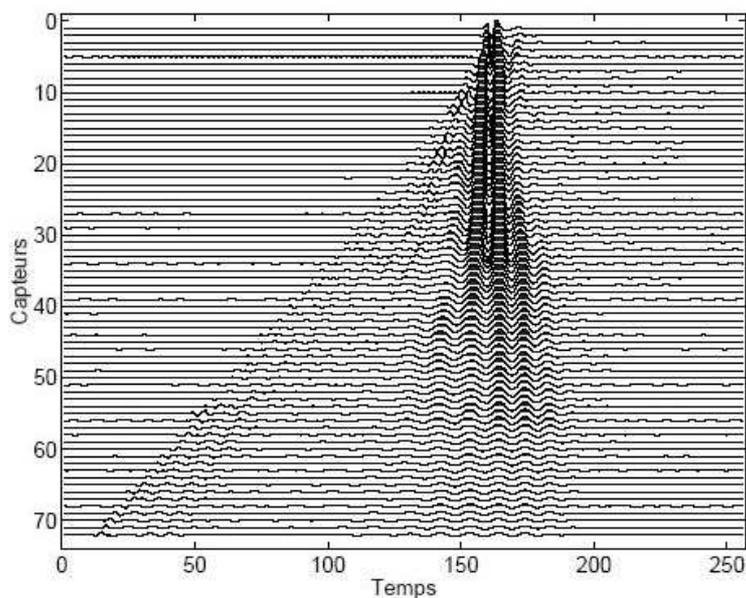


FIGURE 2.3 – Onde de Love

2. Les ondes de surface

Ce sont des ondes guidées par la surface de la Terre. Leur effet est comparable aux rides formées à la surface d'un lac. Elles sont moins rapides que les ondes de volume mais leur amplitude est généralement plus forte et on peut distinguer :

- L'onde de **Love**, découverte en 1911, et également l'onde de **Stoneley** (voir Figure 2.3).
- L'onde de **Rayleigh**, découverte par John William Strutt Rayleigh en 1885 ; son déplacement est assez complexe, constituant un mouvement à la fois horizontal et vertical (elliptique) (voir Figure 2.4).

3. Les bruits sismiques

D'une manière générale, un signal sismique comprend tous les événements enregistrés dont on espère tirer une information sur la structure et la géologie du sous-sol [58]. Tout ce qui n'est pas du signal est considéré comme du bruit constitué des ondes indésirables.

On distingue :

- Les bruits naturels et industriels, qui existent sur les enregistrements, même en l'absence d'ébranlements :

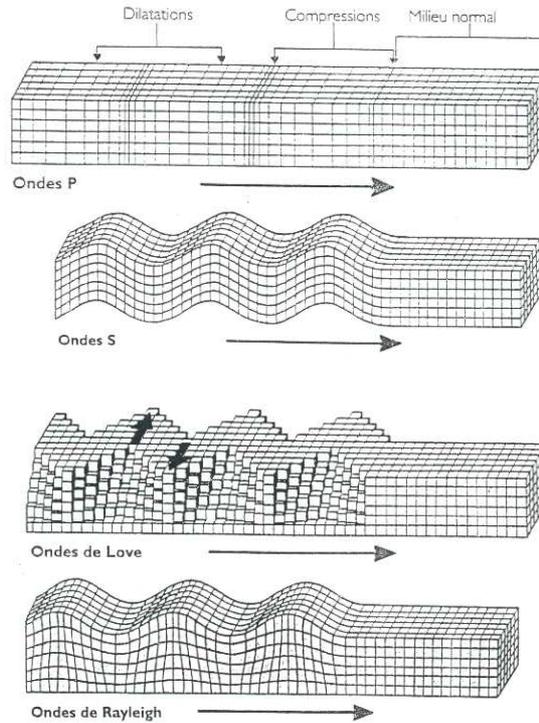


FIGURE 2.4 – Quatre types d’ondes sismiques

Les bruits naturels sont souvent désorganisés, de caractère plus ou moins incohérent (vent, microséisme). Les bruits industriels sont généralement plus organisés, comme l’agitation sismique due à la circulation automobile ou l’induction à 50 Hz qui prend naissance dans les câbles sismiques traditionnels au voisinage des lignes à haute tension.

- Les bruits provoqués, qui sont engendrés par l’ébranlement sismique. En sismique terrestre, on a les ondes de surface, ondes de Rayleigh ou Pseudo-Rayleigh, connues par les sismologues sous le nom de ground-roll.

2.3.2 Modèle simplifié

Le but est de donner un modèle mathématique simplifié qui modélise la propagation des ondes sismiques dans les milieux géologiques sous

certaines contraintes. Il ne s'agit pas ici de caractériser les différents types d'ondes présentes dans une acquisition.

Avant de donner un modèle simplifié de l'équation générale de la trace sismique unidimensionnelle, il est important de préciser quelques notions relatives à la propagation des ondes.

Si on note par $\widehat{s}(\xi)$ la transformée de Fourier d'un signal $s(t) \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, alors la représentation fréquentielle $\widehat{s}(\xi)$ fournit une représentation simple à interpréter par rapport à la représentation temporelle. En particulier pour les signaux stationnaires, la représentation en fréquence offre une meilleure description que celle en temps. Or la propagation des ondes a lieu dans un milieu représenté par une fonction de transfert (fonction de Green en physique) entre la source et le capteur qui agit séparément sur chaque fréquence, alors que la vitesse et l'atténuation d'une onde dépendent de la fréquence considérée. Une modélisation en fréquence de la propagation de l'onde est donc possible. Un signal sous sa forme fréquentielle $\widehat{s}(\xi)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\widehat{s}(\xi) = |\widehat{s}(\xi)| \exp(-i\varphi(\xi)) \quad (2.14)$$

où $\varphi(\xi)$ est la phase du signal, et on définit alors le retard du groupe dans le domaine fréquentiel [12], noté $\tau_g(\xi)$, par

$$\tau_g(\xi) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(\xi)}{d\xi}. \quad (2.15)$$

Sous certaines hypothèses, le retard du groupe renseigne sur l'instant d'apparition de chaque fréquence ξ , en particulier il permet de savoir à quel instant les différentes harmoniques du signal apparaissent.

Le signal émis par une source (impulsion) est renvoyé après déformation (réflexion, réfraction, diffraction) par les interfaces entre les différentes couches géologiques du sous-sol. On peut considérer les interfaces comme émetteurs (sources) de signaux.

En supposant que P sources émettent des signaux $s_p(t)$, avec $p = 1, \dots, P$, le signal reçu sur le i ème capteur $x_i(t)$, avec $i = 1, \dots, N_x$, où N_x est le nombre de capteurs, est donné par le modèle suivant :

$$x_i(t) = \sum_{p=1}^P \int_{\mathbb{R}} a_{ip}(t - \tau) s_p(\tau) d\tau + b_i(t) \quad (2.16)$$

où a_{ip} représente la fonction de transfert entre la source p et le capteur i et $b_i(t)$ est un bruit additif reçu sur chaque capteur.

Dans le cas considéré, le milieu de propagation est supposé homogène et isotrope, et dans ce cas, les fonctions de transfert $a_{ip}(t)$ entre chaque source p et chaque capteur i peuvent être modélisées comme un décalage $\delta(t - t_{ip})$ et une atténuation a_{ip} :

$$a_{ip}(t) = a_{ip}\delta(t - t_{ip}) \quad (2.17)$$

où δ est la distribution de Dirac. En remplaçant (2.17) dans l'équation (2.16), on obtient alors le modèle simplifié de la trace sismique :

$$x_i(t) = \sum_{p=1}^P a_{ip}s_p(t - t_{ip}) + b_i(t) \quad (2.18)$$

2.4 Paramètres des tremblements de terre par l'analyse des ondes sismiques

Nous allons illustrer les informations déduites des enregistrements des ébranlements (sismogrammes) permettant d'analyser la source des tremblements de terre à l'aide de l'enregistrement vertical par quatre stations du réseau sismique belge, d'un séisme de magnitude 3.5 localisé à Sprimont 15 Km au sud-est de Liège (Figure 2.5) [1].

La Figure 2.5 montre les sismogrammes de la composante verticale du mouvement du sol aux stations **Sart Tilman**, **Robertville**, **Meuville** et **Membach** pour le tremblement de terre de Sprimont du 27 décembre 1988 à 11h53min. La durée des enregistrements est de 12 secondes. Le temps d'arrivée des ondes P et S est indiqué sur chacun des enregistrements. Remarquons que le temps d'arrivée de l'onde S a été mesuré sur les composantes horizontales. Le sens du premier mouvement de l'onde P est facilement identifiable. Sur chacun des sismogrammes, un soulèvement du sol (**compression**) correspond à un mouvement vers le haut sur le papier.

Les informations données dans le tableau suivant sont les temps d'arrivées des ondes P et S ainsi que le sens du premier mouvement de l'onde P . Par convention, les signaux des sismomètres sont enregistrés de manière telle qu'un mouvement du sol vers le haut (**compression**) correspond à un mouvement positif (vers le haut de la feuille) sur le sismogramme de la composante verticale. Si le sol s'abaisse (**dilatation**), le mouvement sera négatif (vers le bas de la feuille) sur le sismogramme.

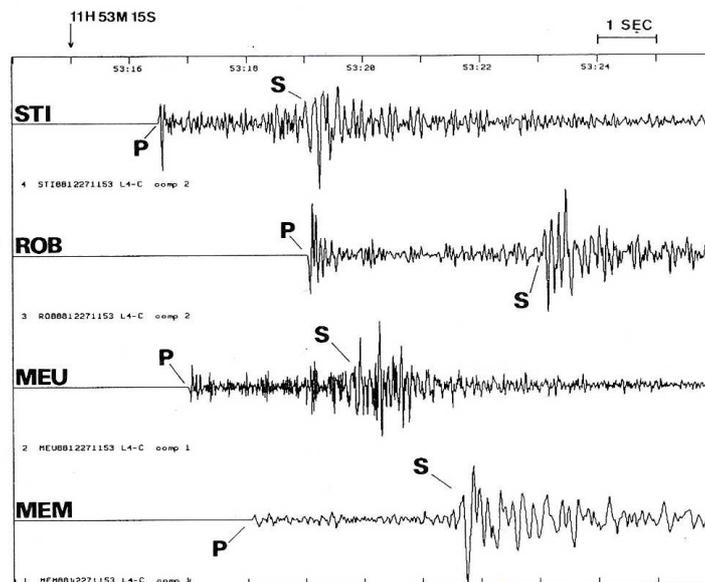


FIGURE 2.5 – Analyse des enregistrements sismiques : Exemple du séisme de Sprimont du 27 décembre 1988 à 11h53m.

2.5 Localisation

Le premier problème auquel un sismologue est confronté après un tremblement de terre est de déterminer les paramètres de base des tremblements enregistrés, tels que l'heure origine, la localisation de l'hypocentre, la magnitude etc. . .

Pour déterminer l'heure origine et la localisation de l'hypocentre, nous avons besoin des coordonnées des stations du réseau sismique et quatre temps d'arrivée sur ces dernières. Les principaux temps d'arrivée d'un tremblement de terre sont les premiers temps d'arrivée des ondes P [5, 58, 61].

Dans cette section, nous revoyons les méthodes de base pour déterminer les paramètres d'un tremblement de terre dans un réseau sismique.

2.5.1 Détermination de l'heure origine et de l'hypocentre

L'endroit où, sur une faille démarre la rupture est appelé foyer du tremblement de terre ou hypocentre. L'épicentre est le point de la sur-

Station	onde P	onde S	sens du premier mouvement
STI	11:53:16.49	11:53:19.00	compression
ROB	11:53:19.05	11:53:23.08	dilatation
MEU	11:53:17.00	11:53:19.87	dilatation
MEM	11:53:18.07	11:53:21.69	compression

TABLE 2.1 – Mesures réalisées sur les enregistrements de la figure (2.5)

face du sol le plus proche du foyer. L'épicentre macrosismique est le lieu de plus forte intensité ressentie, il peut être différent de l'épicentre réel. Autrefois, la détermination de l'épicentre se faisait à partir des appréciations des personnes ayant ressenti le séisme et également les dégâts causés comme nous le verrons dans la grandeur des tremblements de terre. Actuellement, grâce à plusieurs milliers de stations disposées sur l'ensemble de la planète, il est possible de déterminer l'épicentre et l'hypocentre de tous les séismes de magnitude supérieure à 4 et voire même 2 dans certaines zones bien surveillées. Voyons un des moyens géométriques simples pour déterminer l'épicentre d'un séisme et nous pouvons avoir plus d'informations en visitant le site [6].

Si un tremblement de terre se produit à l'heure origine t_0 avec la localisation de l'hypocentre à (x_0, y_0, z_0) , un ensemble des temps d'arrivée peut être obtenu à partir du réseau sismique et ceci constitue le problème de localisation [61]. Si les temps d'arrivée T_P et T_S sont disponibles, nous pouvons utiliser les intervalles temporels $S - P$ pour obtenir une "estimation" de la distance épicentrale D à la station par,

$$D = [V_P V_S / (V_P - V_S)] (T_S - T_P) \quad (2.19)$$

où V_P et V_S sont respectivement les vitesses des ondes P et S , T_S et T_P étant les temps d'arrivée respectivement des ondes P et S . Pour la vitesse typique de l'onde P de 6 Km/s, et $V_P/V_S \simeq 1.8$, la distance D en kilomètres est d'environ 7.5 fois l'intervalle $S - P$ mesuré en secondes.

Disposant des données de n stations, le foyer sera défini comme le point d'intersection moyen des n demi-sphères de rayon D centrées sur chaque station.

2.5.2 Formulation du problème de localisation

Dans le problème de localisation, nous sommes intéressé par un espace quadri-dimensionnel : la coordonnée temporelle t , et les coor-

données spatiales x, y, z . Un vecteur dans cet espace peut être écrit comme

$$\chi = (t, x, y, z)^T. \quad (2.20)$$

De plus, on introduit l'indice k pour spécifier l'observation faite à la $k^{\text{ième}}$ station.

Pour localiser un tremblement de terre en utilisant un ensemble de temps d'arrivée τ_k à partir des stations aux positions (x_k, y_k, z_k) , avec $k = 1, 2, \dots, m$, nous devons premièrement partir d'un modèle dans lequel les temps théoriques de parcours T_k de l'hypocentre à la position (x^*, y^*, z^*) des stations, peuvent être calculés. On considère l'heure origine et l'hypocentre comme un vecteur initial χ^* dans l'espace quadridimensionnel :

$$\chi^* = (t^*, x^*, y^*, z^*)^T. \quad (2.21)$$

Le temps d'arrivée théorique t_k à partir de χ^* jusqu'à la $k^{\text{ième}}$ station est donné par

$$t_k(\chi^*) = T_k(\chi^*) + t^*. \quad (2.22)$$

On définit maintenant l'erreur des temps d'arrivée à la $k^{\text{ième}}$ station, r_k , défini par

$$\begin{aligned} r_k(\chi^*) &= \tau_k - t_k(\chi^*) \\ &= \tau_k - T_k(\chi^*) - t^* \end{aligned}$$

avec $k = 1, 2, \dots, m$ et il faut spécifier que les temps d'arrivées τ_k sont connus par le biais d'une station plus proche et le but est de calculer T_k en minimisant les erreurs.

L'objectif est d'ajuster le vecteur χ^* de sorte que les erreurs soient minimisées et l'approche des moindres carrés est souvent utilisée. Comme le temps de parcours entre deux points est généralement une fonction non linéaire, le problème de localisation devient un problème d'optimisation non linéaire. Cependant, l'algorithme de Gauss-Newton est totalement spécifique à la minimisation d'une somme de fonctions au carré et présente le grand avantage de ne pas nécessiter les dérivées secondes, parfois complexes à calculer.

Geiger apparaît comme le premier à avoir appliqué cette méthode dans la résolution du problème de localisation. Cette méthode peut se développer comme suit. La fonction objectif pour minimiser les moindres carrés est donnée par

$$F(\chi^*) = \sum_{k=1}^m [r_k(\chi^*)]^2. \quad (2.23)$$

On peut considérer les erreurs $r_k(\chi^*)$, $k = 1, 2, \dots, m$ comme les composantes d'un vecteur dans l'espace Euclidien m -dimensionnel et écrire

$$r = (r_1(\chi^*), r_2(\chi^*), \dots, r_m(\chi^*))^T. \quad (2.24)$$

Le vecteur d'ajustement devient

$$\delta\chi = (\delta t, \delta x, \delta y, \delta z)^T. \quad (2.25)$$

Dans la méthode de Gauss-Newton, un ensemble d'équations linéaires est résolu pour un vecteur d'ajustement à chaque itération et cet ensemble peut être écrit comme suit

$$A^T A \delta\chi = -A^T r \quad (2.26)$$

où la matrice jacobienne A est définie par

$$A = \begin{pmatrix} \partial r_1 / \partial t & \partial r_1 / \partial x & \partial r_1 / \partial y & \partial r_1 / \partial z \\ \partial r_2 / \partial t & \partial r_2 / \partial x & \partial r_2 / \partial y & \partial r_2 / \partial z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial r_m / \partial t & \partial r_m / \partial x & \partial r_m / \partial y & \partial r_m / \partial z \end{pmatrix}$$

et les dérivées partielles sont évaluées au vecteur χ^* . Utilisant les erreurs de temps d'arrivée, la matrice jacobienne devient

$$A = - \begin{pmatrix} 1 & \partial T_1 / \partial x & \partial T_1 / \partial y & \partial T_1 / \partial z \\ 1 & \partial T_2 / \partial x & \partial T_2 / \partial y & \partial T_2 / \partial z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \partial T_m / \partial x & \partial T_m / \partial y & \partial T_m / \partial z \end{pmatrix} \Big|_{\chi^*}$$

En substituant l'équation précédente dans l'équation (2.26), on a un ensemble de 4 équations linéaires à 4 inconnues,

$$G \delta\chi = \rho \quad (2.27)$$

où

$$G = \begin{pmatrix} m & \sum a_i & \sum b_i & \sum c_i \\ \sum a_i & \sum a_i^2 & \sum a_i b_i & \sum a_i c_i \\ \sum b_i & \sum a_i b_i & \sum b_i^2 & \sum b_i c_i \\ \sum c_i & \sum a_i c_i & \sum b_i c_i & \sum c_i^2 \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

$$\rho = \left(\sum r_k, \sum a_k r_k, \sum b_k r_k, \sum c_k r_k \right)^T,$$

avec $k = 1, 2, \dots, m$.

Dans l'équation (2.28), on a introduit

$$a_k = \partial T_k / \partial x|_{\chi^*}, b_k = \partial T_k / \partial y|_{\chi^*}, c_k = \partial T_k / \partial z|_{\chi^*}. \quad (2.29)$$

On remplace alors χ^* par $\chi^* + \delta\chi$, et on répète la même procédure jusqu'à un critère d'arrêt. On peut résoudre le système surdéterminé équivalent de m équations linéaires,

$$A\delta\chi = -r. \quad (2.30)$$

Il peut être réécrit comme

$$\delta t + (\partial T_k / \partial x)|_{\chi^*} \delta x + (\partial T_k / \partial y)|_{\chi^*} \delta y + (\partial T_k / \partial z)|_{\chi^*} \delta z = r_k(\chi^*). \quad (2.31)$$

Normalement, la méthode de Geiger est appliquée seulement pour les premiers temps d'arrivée des ondes P .

De plus, si le temps absolu n'est pas disponible, on peut utiliser les intervalles temporels $S - P$ pour localiser les tremblements de terre. On modifie l'équation (2.31), on obtient

$$(\partial T_k / \partial x)|_{\chi^*} \delta x + (\partial T_k / \partial y)|_{\chi^*} \delta y + (\partial T_k / \partial z)|_{\chi^*} \delta z = r_k(\chi^*), \quad (2.32)$$

où r_k est l'erreur de l'intervalle temporel $S - P$ à la $k^{\text{ième}}$ station, T_k étant l'intervalle temporel $S - P$ théorique et δt disparaît, car cet intervalle ne dépend pas de l'heure origine.

2.6 La grandeur des tremblements de terre

Avant la mise en service des premiers sismographes à la fin du siècle dernier, les seules informations disponibles concernant les tremblements de terre étaient la manière dont les vibrations du sol avaient été ressenties par les témoins ainsi que les éventuels dégâts provoqués. Depuis le siècle dernier, la nécessité de classifier les tremblements de terre en fonction de leur importance a conduit à la notion d'intensité, c'est-à-dire la mesure, en un endroit donné, des effets d'un tremblement de terre sur l'homme et son environnement naturel ainsi que sur les ouvrages qu'il a construits.

On définit ainsi différents degrés en fonction de la manière dont le séisme a été senti ou des dégâts qu'il a provoqués. Différentes échelles d'intensité ont ainsi vu le jour, celle de **Mercalli** étant la plus connue. Les différents degrés dans cette échelle d'intensité sont définis brièvement ci-dessous :

- degré I : pas ressenti.
- degré II : ressenti par les gens au repos dans un endroit favorable.
- degré III : ressenti à l'intérieur des habitations.
- degré IV : les objets suspendus se balancent.
- degré V : les horloges à balancier s'arrêtent.
- degré VI : les maçonneries de mauvaise qualité se fissurent, des vitres et de la vaisselle sont cassées.
- degré VII : chute de cheminées et de corniches. Quelques fissures dans de bonnes constructions,...
- degré VIII : apparition de dégâts structuraux aux constructions,...
- degré IX : panique générale. Dégâts à toutes les fondations. De nettes fissures visibles à la surface du sol.
- degré X : la plupart des maçonneries et des charpentes sont détruites avec leur fondation. Grands glissements de terrain,...
- degré XI : les rails sont complètement tordus
- degré XII : ruine à peu près totale. Topographie bouleversée.

La notion de degré d'intensité est locale et attribuée à un endroit déterminé pour un tremblement de terre considéré. Les zones d'intensité égale sont limitées par des courbes *isoséistes*. La mesure la plus adéquate de la grandeur d'un tremblement de terre est le **moment sismique** M_0 qui est directement relié aux dimensions de la faille le long de laquelle la rupture s'est propagée et à la grandeur du mouvement relatif provoqué par le séisme :

$$M_0 = \mu LWD$$

où μ est la rigidité moyenne dans la région focale, L et W sont respectivement la longueur et la largeur de la faille tandis que D est le mouvement relatif (glissement) moyen entre les deux blocs crustaux séparés par la faille.

En observant les ondes sismiques à des longueurs d'ondes plus grandes que les dimensions de la faille affectée, la source des séismes peut être supposée ponctuelle et représentée par un double couple de forces dont le moment résultant est nul. Le moment d'un de ces couples est précisément le moment sismique. Une bonne détermination du moment sismique nécessite l'analyse des ondes sismiques qui ont des longueurs d'ondes supérieures aux dimensions de la faille. Le moment sismique des grands tremblements de terre est généralement déterminé par l'analyse des enregistrements sur les sismomètres à très longue période (100 s).

Plus empirique, le concept de **magnitude** est basé sur la mesure du déplacement maximal du sol mesuré sur les sismogrammes des différentes

stations ayant enregistré un tremblement de terre, l'atténuation de cette amplitude en fonction de la distance étant prise en considération.

La magnitude locale M_L est définie par la relation :

$$M_L = \log_{10} A(\Delta) - \log_{10} A_0(\Delta)$$

où

- $A(\Delta)$ est le déplacement maximal du sol en une station située à une distance Δ du foyer sismique.
- $A_0(\Delta)$ est le déplacement maximal prédéterminé pour un séisme de magnitude nulle. Cette fonction dépend de la région considérée.

La magnitude locale est utilisée pour déterminer la grandeur des séismes crustaux localisés à moins de 1000 Km de la station. Etant donné que les sismomètres utilisés ont une fréquence propre de 1 Hz, les fréquences des mouvements du sol utilisés pour la détermination de la magnitude sont toujours supérieures à 1 Hz.

Le concept a été étendu pour permettre d'évaluer la grandeur des tremblements de terre enregistrés à des distances supérieures à 1000 Km, deux échelles de magnitude sont particulièrement utilisées :

- m_b (**magnitude d'ondes de volume**) qui est déterminée à partir des ondes de volume P à 1 seconde de période.
- M_s (**magnitude d'ondes de surface**) qui est déterminée à partir des ondes de surface à 20 secondes de période.

Chaque échelle de magnitude a ses limitations. La principale est que pour des tremblements de terre dont la longueur de faille est supérieure à la longueur d'onde des ondes sismiques utilisées pour sa détermination, la valeur de la magnitude n'augmente plus de manière significative et tend asymptotiquement vers une valeur limite quelle que soit la dimension de la faille. Afin de donner une magnitude réellement représentative des mécanismes physiques, Kanamori a défini en 1977 la magnitude M_W basée sur la valeur du moment sismique. Si le moment sismique (en N.m ; Newton.mètre) est déterminé, on a : $M_W = 2/3 \log_{10} M_0 - 6.06$.

Qu'est-ce que l'**échelle de Richter** qui est d'actualité ? Lors d'un tremblement de terre, les appareils d'enregistrement mesurent deux paramètres : la magnitude qui est l'énergie libérée au foyer par le choc initial et l'intensité du phénomène. On se sert justement pour le premier de l'échelle de Richter qui, contrairement à ce qu'on croit, n'est pas graduée de 1 à 9, car il n'y a ni limite inférieure, ni limite supérieure.

2.7 Conclusion

Au cours de cette introduction sur le sismique, nous avons présenté brièvement les éléments de base du traitement du signal et aussi les principes de propagation des ondes sismiques dans un milieu géologique dans le but d'aboutir à la compréhension d'un modèle mathématique simplifié permettant de décrire leur comportement .

Or, en pratique, on dispose des données échantillonnées (prise de mesures sur le terrain), donc nous avons rappelé le fameux théorème de Shannon-Nyquist qui est à la base de la théorie de numérisation, et qui assure que les données collectées représentent bien le signal étudié. A la fin, nous avons montré, sur un cas précis, la détermination des temps d'arrivée des différents types d'ondes sismiques (de volume). Nous essaierons d'appliquer dans la suite la transformée en ondelettes ainsi que les corrélations des transformées entre elles pour détecter avec précision ces temps d'arrivée, car les ondes sismiques sont des phénomènes multi-échelle.

Chapitre 3

Analyse temps-fréquence

Ce chapitre introduit la notion de représentation fréquentielle d'une fonction dans différents espaces. Nous donnons quelques notions préalables d'analyse. Nous présenterons la transformée de Fourier d'un signal unidimensionnel et enfin nous donnerons la notion d'analyse temps-fréquence dans le cas de Gabor [10, 19].

3.1 Notions préalables

3.1.1 Mesure

Soit X un ensemble.

Une algèbre \mathcal{A} , aussi appelée algèbre de Borel ou tribu sur X , est une famille de parties de X , donc un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$, contenant X lui-même et stable par complémentation et réunion dénombrable, ce qui s'écrit :

- X est élément de \mathcal{A} ;
- Si K est élément de \mathcal{A} , alors $\complement K$ aussi (complémentaire de K dans X);
- Si (K_n) est une suite (finie ou non) d'éléments de \mathcal{A} , alors $\bigcup K_n$ est élément de \mathcal{A} et pour plus de détails voir [15, 39].

Soit X un ensemble et \mathcal{A} une tribu sur X . On appelle *espace mesurable* le couple (X, \mathcal{A}) . Les éléments de \mathcal{A} sont appelés *ensembles mesurables*.

Une *mesure* sur (X, \mathcal{A}) est une fonction :

$$\lambda : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty] \quad (3.1)$$

telle que

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ est une suite de parties deux à deux disjointes, alors

$$\lambda(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i). \quad (3.2)$$

On appelle espace mesuré le triplet $(X, \mathcal{A}, \lambda)$, où λ est une mesure sur l'espace mesurable (X, \mathcal{A}) . Un élément $A \in \mathcal{A}$ est de mesure nulle si $\lambda(A) = 0$.

On dit qu'une propriété (P) définie sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \lambda)$ est vérifiée presque partout ($\lambda - p.p.$ ou $p.p.$), si elle est vérifiée sur le complémentaire d'un ensemble de mesure nulle.

Exemple :

Soit $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ l'espace mesurable \mathbb{R} muni de sa tribu borélienne. Il existe une unique mesure notée λ sur cet espace mesurable qui possède les deux propriétés suivantes :

1. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall A \in B(\mathbb{R}), \lambda(a + A) = \lambda(A)$ (invariance par translation)
2. $\lambda([0, 1]) = 1$.

Cette mesure est appelée mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

3.1.2 Espaces L^p

Avant de définir les espaces L^p , on définit généralement les espaces \mathcal{L}^p . Pour tout réel p strictement positif, l'espace $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \lambda)$ est l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles ou complexes, définies et mesurables sur l'espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \lambda)$ dont la $p^{\text{ième}}$ puissance est λ -intégrable. On définit $\|\cdot\|_p$ comme suit :

$$\|f\|_p = \left[\int_X |f|^p d\lambda \right]^{1/p}. \quad (3.3)$$

Autrement dit,

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \lambda) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K}; f \text{ mesurable et } \|f\|_p < +\infty\}. \quad (3.4)$$

Cet espace est un espace vectoriel semi-normé car deux fonctions qui ne diffèrent que d'un ensemble de mesure nulle ont la même semi-norme

$\|\cdot\|_p$. L'espace $L^p(X, A, \lambda)$ est ensuite défini comme l'espace vectoriel quotient de $\mathcal{L}^p(X, A, \lambda)$ par la relation d'équivalence " $f \sim g$ " si et seulement si " f et g sont égales p.p.". Ainsi, $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $L^p(X, A, \lambda)$.

En général, si $p \neq q$, on n'a ni $L^p \subset L^q$, ni $L^q \subset L^p$. Cependant si la mesure est finie, alors pour $p < q$, $L^q \subset L^p$.

D'autre part s'il existe $\epsilon > 0$ tel que toute partie non vide de X est de mesure plus grande que ϵ , pour $p < q$, $L^p \subset L^q$.

Pour $1 < p < +\infty$, l'espace dual de L^p est L^q , où q est défini de façon que $1/p + 1/q = 1$.

On aura ainsi l'espace $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ qui sont définis respectivement par :

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \iff \|f(t)\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < +\infty \quad (3.5)$$

appelées fonctions intégrables.

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \iff \|f(t)\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < +\infty \quad (3.6)$$

appelées fonctions d'énergie finie. Nous noterons par la suite $L^2(\mathbb{R}, dt) \equiv L^2(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|_2 \equiv \|\cdot\|$.

$L^2(\mathbb{R})$ est en réalité un espace de Hilbert associé au produit scalaire :

$$\langle f|g \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)} g(t) dt, \langle f|f \rangle = \|f\|^2, \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}). \quad (3.7)$$

On dira qu'une fonction f définie sur \mathbb{R} appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si elle est indéfiniment dérivable et que la fonction, ainsi que toutes ses dérivées, est à décroissance rapide [59] :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall k, j \in \mathbb{N}, \exists C \in \mathbb{R}_+, \sup_{t \in \mathbb{R}} |t^k f^{(j)}(t)| \leq C\} \quad (3.8)$$

et l'on définira l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ des distributions tempérées comme étant le dual de l'espace des fonctions de Schwartz, c'est-à-dire l'ensemble des fonctionnelles linéaires continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Nous aurons également $\mathcal{S} \subset L^2 \subset \mathcal{S}'$. Si $s \in \mathcal{S}$ et $d \in L^2$, alors la forme sesquilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ mettant \mathcal{S} et \mathcal{S}' en dualité coïncide avec le produit scalaire de L^2 :

$$\langle s, d \rangle = \langle \overline{s} | d \rangle_{L^2}.$$

Un exemple de fonction de Schwartz est la gaussienne $g(t) = \exp(-t^2)$, tandis que la fonction de Dirac $\delta(t)$ définie par :

$$\langle \delta | f \rangle = \int_{\mathbb{R}} \delta(t) f(t) dt = f(0), \forall f \in S, \quad (3.9)$$

appartient à $S'(\mathbb{R})$.

L'espace $L^2(\mathbb{R})$ appartient à une classe d'espace tout à fait générale

$$L^p(\mathbb{R}, dt) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable} : \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\},$$

avec $p \geq 1$. Pour $p \neq 2$, la norme $\|\cdot\|_p$ n'est pas liée à un produit scalaire, d'où les espaces $L^p(\mathbb{R}, dt) \equiv L^p(\mathbb{R})$ ne sont pas des espaces de Hilbert, mais des espaces de Banach, c'est-à-dire normés et complets.

3.2 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier a longtemps dominé le traitement du signal laissant peu de place aux mathématiques modernes. Jusqu'aux années 1970, les signaux sont souvent des enregistrements de paroles ou de sons modélisés par des réalisations de processus gaussiens, en conséquence, les algorithmes linéaires étaient considérés comme optimaux et en ajoutant une hypothèse de stationnarité, on se retrouve dans le pré carré des opérateurs de convolution, qui sont diagonalisés par la transformée de Fourier [57]. La transformée de Fourier est une opération qui transforme une fonction intégrable sur \mathbb{R} en une autre fonction, décrivant le spectre fréquentiel de cette dernière. Si f est intégrable sur \mathbb{R} , sa transformée de Fourier est définie par :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\xi t} dt, \quad (3.10)$$

où $\xi \in \mathbb{R}$ est la fréquence de $\widehat{f}(\xi)$.

On a également :

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt \quad (3.11)$$

et l'intégrale (3.10) converge pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Proposition 3.1 Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi t} d\xi. \quad (3.12)$$

On peut faire une extension par continuité de $L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ à une isométrie de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'il est toujours possible de trouver une suite $f_n \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}$) telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0$ pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, autrement dit, la transformée de Fourier s'étend à l'espace $L^2(\mathbb{R})$.

Proposition 3.2 *Si $f \in \mathcal{S}$, alors l'égalité de Plancherel donne*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi. \quad (3.13)$$

Le théorème de Plancherel permet d'étendre la transformation de Fourier aux fonctions de carré intégrable sur \mathbb{R} .

Théorème 3.3 (Théorème de Plancherel) *Soit f une fonction complexe sur \mathbb{R} et de carré intégrable. Alors la transformée de Fourier de f peut être définie comme suit : pour tout s entier, on pose*

$$f_s(t) = (f1_{[-s,s]})(t) = \begin{cases} f(t), & \text{si } |t| \leq s, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La suite des transformées de Fourier \widehat{f}_s converge dans $L^2(\mathbb{R})$, et sa limite est la transformée de Fourier \widehat{f} , c'est-à-dire

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}_s(\xi)|^2 d\xi = 0.$$

De plus, on a l'identité :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

De façon similaire, si on pose $g_s(t) = \int_{-s}^s \widehat{g}(\xi) e^{2i\pi t \xi} d\xi$, les g_s convergent en moyenne quadratique vers f .

La transformée de Fourier s'étend à l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ [59]. En faisant référence à l'équation (3.9), la distribution de Dirac est associée à

$$\widehat{\delta}(\xi) = 1. \quad (3.14)$$

L'opération de convolution de deux fonctions est donnée par :

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-u)g(u)du, \quad (3.15)$$

pour $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Comme le produit scalaire défini en l'équation (3.7), la convolution se transpose simplement en Fourier.

Proposition 3.4 *Si f et g appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$, alors*

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}|\widehat{g} \rangle, \quad (3.16)$$

et

$$(\widehat{f * g})(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi). \quad (3.17)$$

La dernière égalité est connue sous le nom de *théorème de convolution*.

Le résultat de ce théorème peut être étendu à L^1 , mais pas systématiquement à tout l'espace de Hilbert L^2 , car deux fonctions quelconques de L^2 peuvent ne pas être convoluables, c'est-à-dire que leur produit de convolution n'appartient pas à L^2 . Le théorème de convolution a de nombreuses applications en physique, en particulier dans la description mathématique du processus de mesure, si l'on tient compte des incertitudes statistiques sur les résultats mesurés. Pratiquement, un signal observé sera la convolution du signal incident avec la fonction de réponse de l'appareil détecteur. Remarquons encore la propriété intéressante qui permet de déterminer cette fonction de réponse instrumentale. En envoyant un signal impulsionnel dans l'appareil, celui-ci est décrit mathématiquement par la fonction de Dirac et on a :

$$(\delta * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} \delta(t-u)g(u)du \quad (3.18)$$

$$= g(t). \quad (3.19)$$

On a ainsi les propriétés suivantes :

1. **Covariance :**

$$f \text{ réelle} \Leftrightarrow \widehat{f}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)}. \quad (3.20)$$

De même :

$$f \text{ imaginaire} \Leftrightarrow \widehat{f}(\xi) = -\overline{\widehat{f}(-\xi)}.$$

2. **Parité :**

$$f \text{ paire} \Leftrightarrow \widehat{f}(\xi) \text{ paire}; \quad (3.21)$$

$$f \text{ impaire} \Leftrightarrow \widehat{f}(\xi) \text{ impaire}.$$

3. **Dilatation :**

$$f(t) \mapsto f(\alpha t) \Leftrightarrow \widehat{f}(\xi) \mapsto \widehat{f}_\alpha(\xi) = \frac{1}{|\alpha|} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right). \quad (3.22)$$

De ces deux observations à cause de $|\alpha|$, il découle qu'à une contraction de $f(\alpha > 1)$ est associée une dilatation en fréquence, tandis qu'une dilatation de $f(\alpha < 1)$ entraîne une contraction en fréquence.

4. **Translation** : Pour un décalage dans le temps, on observe :

$$f(t) \mapsto f(t - a) \Leftrightarrow \widehat{f}(\xi) \mapsto e^{-ia\xi} \widehat{f}(\xi) \quad (3.23)$$

ce qui s'observe directement en effectuant le changement de variable $s = t - a$:

$$\int_{\mathbb{R}} f(t - a) e^{-ia\xi} dt = \int_{\mathbb{R}} f(s) e^{-i\xi(s+a)} ds.$$

De même pour un décalage en fréquence :

$$\widehat{f}(\xi) \mapsto \widehat{f}(\xi - \xi_0) \Leftrightarrow f(t) \mapsto e^{i\xi_0 t} f(t). \quad (3.24)$$

5. **La classe de Schwartz est invariante sous transformée de Fourier**

$$f \in S(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \widehat{f} \in S(\mathbb{R}) \quad (3.25)$$

6. **Dérivée**

$$f^n(t) \mapsto (i\xi)^n \widehat{f}(\xi) \quad (3.26)$$

avec $t, \xi, \alpha, a \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}$. On citera encore l'expression de la dérivée de la convolution :

$$\frac{d}{dt}(f * g) = \frac{df}{dt} * g = f * \frac{dg}{dt}. \quad (3.27)$$

7. **Corrélation**

On définit la fonction d'intercorrélation comme suit :

$$\phi_{fg}(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} g(t + \tau) dt \quad (3.28)$$

En effectuant le changement de variable $s = t + \tau$, on établit :

$$\phi_{fg}(\tau) = (f^* * g)(\tau) \quad (3.29)$$

où l'on définit $f^*(t) = \overline{f(-t)}$. Définissons alors la fonction d'auto-corrélation, qui s'obtient simplement en considérant $f = g$:

$$\phi_f(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} f(t + \tau) dt. \quad (3.30)$$

La fonction d'autocorrélation est directement liée à l'énergie du signal ; calculant la valeur de cette fonction pour $\tau = 0$, on obtient :

$$\phi_f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt. \quad (3.31)$$

On peut encore associer la fonction de corrélation au produit scalaire ; définissant $g_\tau(t) = g(t + \tau)$, on a :

$$\phi_{fg}(\tau) = \langle f | g_\tau \rangle. \quad (3.32)$$

Puisque l'on associe la corrélation à la convolution, au travers de la relation (3.29), on peut immédiatement déterminer sa transformée de Fourier :

$$\phi_{fg}(\xi) = \widehat{(f^* * g)}(\tau) = \widehat{f^*}(\xi) \widehat{g}(\xi) \quad (3.33)$$

Par ailleurs, $\widehat{f^*}(\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}$. Finalement :

$$\begin{aligned} \phi_{fg}(\xi) &= \overline{\widehat{f}(\xi)} \widehat{g}(\xi), \\ \phi_f(\xi) &= |\widehat{f}(\xi)|^2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

3.2.1 Discrétisation

Il est rare en pratique d'analyser un signal continu. Comme nous ne disposons plus d'une variable t continue, mais d'un ensemble t_1, t_2, \dots, t_N de valeurs temporelles discrètes, N représente ici le nombre d'échantillons que l'on possède sur la largeur d'une période. Cette discrétisation est le seul type d'information traitable numériquement. Nous pouvons nous demander ce qu'il advient de la transformée de Fourier d'un signal discrétisé. Une méthode de discrétisation de la transformée de Fourier est connue sous l'appellation du Peigne de Dirac. Nous ferons appel à la théorie des distributions, et en particulier à la fonction δ de Dirac. Notons par f_D la fonction de la variable continue t réalisée sur tous les intervalles de temps $T \in \mathbb{R}_+^*$ définie par l'expression :

$$f_D(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \delta(t - nT) \quad (3.35)$$

à partir des échantillons $\{f(nT) : n \in \mathbb{Z}\}$. Si f oscille trop rapidement par rapport à l'échelle de temps T , la discrétisation décrite en (3.35) effacera ce comportement. Mathématiquement, cette notion est affinée en introduisant la définition suivante :

Définition 3.5 Une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ est dite à bande limitée s'il existe un $\xi_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\widehat{f}(\xi) = 0$ si $|\xi| > \xi_0$, auquel cas, ξ_0 est la bande passante de f .

Nous désignons par \mathcal{B}_{ξ_0} , l'ensemble des fonctions de bande passante $\xi_0 \in \mathbb{R}_+$, c'est-à-dire

$$\mathcal{B}_{\xi_0} = \{g \in L^2(\mathbb{R}) : \widehat{g}(\xi) = 0, \forall |\xi| > \xi_0\}. \quad (3.36)$$

Dès lors, sous certaines conditions, la fonction continue f peut être reconstruite à l'aide du théorème de Shannon-Whittaker.

Théorème 3.6 Si f est une fonction à bande limitée de bande passante $\xi_0 \leq \frac{\pi}{T}$, alors

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) h_T(t - nT), \quad (3.37)$$

avec $h_T(t) = \left(\frac{\pi t}{T}\right)^{-1} \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \equiv \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right)$. Dans le cas inverse, c'est-à-dire si $\xi_0 > \frac{\pi}{T}$, il n'est pas possible de reconstruire f à partir des valeurs de $f(nT)$.

$$\widehat{f}_D(\xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_n \widehat{f}\left(\xi - n \frac{2\pi}{T}\right). \quad (3.38)$$

La preuve de ce théorème consiste à remarquer que (3.35) peut se réécrire comme

$$f_D(t) = f(t) \sqcup\sqcup_T(t), \quad (3.39)$$

où $\sqcup\sqcup_T(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT)$ est le peigne de Dirac.

Par conséquent, en inversant le rôle des fréquences et des positions dans le théorème de convolution, on obtient

$$f_D(\xi) = \frac{1}{2\pi} (\widehat{f} * \widehat{\sqcup\sqcup_T})(\xi). \quad (3.40)$$

En outre, en employant la covariance sous translation de la transformée de Fourier donnée vu précédemment, on a

$$\widehat{\sqcup\sqcup_T}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\xi T}. \quad (3.41)$$

Le théorème suivant introduit un lien entre le support de $\widehat{f}(\xi)$ et la période de $\widehat{f}_D(\xi)$.

Théorème 3.7 (Théorème de Shannon-Nyquist) Soit $\widehat{f}(\xi)$ à support limité tel que

$$\xi \in [-\xi_{max}, \xi_{max}];$$

Si le signal ne contient aucune fréquence supérieure à ξ_{max} , alors toute l'information est contenue dans les valeurs échantillonnées $f(nT)$ pour autant que

$$T \leq \frac{\pi}{\xi_{max}} = \frac{1}{2\nu_{max}}$$

avec $\nu_{max} \equiv \frac{\xi_{max}}{2\pi}$, appelée fréquence de Nyquist, ou fréquence de coupure. La condition exprimée par le théorème se résume alors simplement par la relation

$$\nu_{\text{échantillonnage}} > 2\nu_{max}. \quad (3.42)$$

Si la fréquence d'échantillonnage est trop faible (la période trop élevée), on parlera de sous-échantillonnage : il y aura des replis du spectre sur lui-même (angl. aliasing), c'est-à-dire des recouvrements partiels.

En résumé, la démarche est donc la suivante :

$$f(t) \mapsto f_D(t) \mapsto \widehat{f}_D(\xi) \mapsto \widehat{f}(\xi) \mapsto f(t).$$

Pour exprimer $f_D(t)$ à partir de $f(t)$, on applique le peigne de Dirac. On calcule alors $\widehat{f}_D(\xi)$ par la transformée de Fourier, et on sait que le résultat représente

$$\widehat{f}_D(\xi) = \frac{1}{T} \sum_n f\left(\xi - n\frac{2\pi}{T}\right).$$

Les fonctions à bande limitée permettent également de discrétiser le produit scalaire et la convolution.

Proposition 3.8 Si $f, g \in \mathcal{B}_{\xi_0}$, avec $\xi_0 < \frac{\pi}{T}$, alors

$$\langle f|g \rangle = T \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{f(nT)} g(nT) \quad (3.43)$$

$$(f * g)(t) = T \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) g(t - nT). \quad (3.44)$$

3.2.2 Implémentation

Il est rare d'observer dans la réalité un signal numérique parfaitement périodique. Le calcul numérique impose de considérer des signaux de longueur finie, c'est-à-dire la taille limitée de leur support d'enregistrement.

Supposons dans la suite que $T = 1$ pour simplifier les calculs. Soit $f \in \mathcal{B}_N$ une fonction à support fini, c'est-à-dire $\text{supp}(f) = [0, N]$. Nous commençons par définir la périodisation

$$f_p(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(t + mN). \quad (3.45)$$

Même si $f_p(t) \notin L^2(\mathbb{R})$, en restreignant la somme apparaissant dans (3.45) à $m \in [-M, M]$, pour $M \in \mathbb{N}$, et en passant à la limite $M \rightarrow \infty$, la formule de Poisson montre facilement que

$$\widehat{f}_p(\xi) = \frac{2\pi}{N} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(n \frac{2\pi}{N}\right) \delta\left(\xi - n \frac{2\pi}{N}\right). \quad (3.46)$$

Par conséquent, la modélisation (3.35) associée à f_p devient

$$f_D(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_p(n) \delta(t - n). \quad (3.47)$$

En utilisant cette expression, on a

$$\begin{aligned} \widehat{f}_D(\xi) &= \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\xi - k \frac{2\pi}{T}\right), \\ \widehat{f}_D(\xi) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_p(\xi - 2\pi k) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k, n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(n \frac{2\pi}{N}\right) \delta\left(\xi - \frac{2\pi}{N}(n + kN)\right), \end{aligned} \quad (3.48)$$

où n est restreint à N valeurs puisque $\widehat{f}(n) = 0$ pour $|n| > \frac{N}{2}$.

En conclusion, la discrétisation apparaît à la fois en position et en fréquence; tout comme f_D, \widehat{f}_D est complètement déterminé par N fréquences $\xi = n \frac{2\pi}{N}$ pour $n \in \mathbb{Z}[N] = 0, \dots, N-1$.

Ceci nous permet d'analyser le contenu fréquentiel de tout vecteur $f[n]; n \in [0, N[$, représentant un signal continu f , au moyen de la transformée de Fourier discrète

$$\widehat{f}[k] = \sum_{n \in \mathbb{Z}[N]} f[n] \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} kn\right), \quad (3.49)$$

où les crochets indiquent les caractères discret et fini pour f et \widehat{f} .

Comme la famille $\exp(-i\frac{2\pi}{N}kn); k \in [0, N[$, est une famille orthogonale de séquences discrètes de période N , la transformée de Fourier discrète inverse est donnée par

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbb{Z}[N]} \widehat{f}[k] \exp(i\frac{2\pi}{N}kn). \quad (3.50)$$

De manière brutale, le calcul de l'ensemble des $\widehat{f}[k]$, ainsi que celui de la reconstruction des $f[n]$ à partir de ces coefficients, requiert $O(N^2)$ opérations.

Il existe cependant un algorithme rapide pour réaliser ces opérations : la FFT. Ce dernier évalue l'ensemble des valeurs $\widehat{f}[k]$ (ou $f[n]$) en $O(N \log_2 N)$ opérations.

En supposant que pour une fonction $f \in \mathcal{B}_N$ de support $[0, N]$, la valeur $\widehat{f}[k]$ corresponde au contenu fréquentiel de la fonction $f(t)$ en $\xi = \frac{2\pi}{N}k$, c'est-à-dire $\widehat{f}(\frac{2\pi}{N}k)$, la FFT permet d'obtenir un calcul rapide de la transformée de Fourier de $f(t)$.

En conclusion, la transformée de Fourier analyse le contenu "fréquentiel" d'un signal. C'est une représentation globale du signal. Elle ne permet pas d'analyser son comportement fréquentiel local, ni sa régularité locale. La condition de convergence sur la transformée de Fourier n'indique que le pire ordre de singularité. Elle ignore les régularités locales.

3.3 Transformée de Fourier à court terme

Dans la pratique, un grand nombre de signaux sont non stationnaires, transients, et l'aspect intéressant réside dans les "changements de régime". Par ailleurs, il existe généralement une corrélation entre la durée d'un signal et sa fréquence moyenne. Ainsi dans un signal vocal nous pouvons constater que les voyelles sont des signaux de fréquence moyenne faible et de durée relativement longue, tandis que les consonnes ont une fréquence plus élevée, en fait un spectre beaucoup plus riche, et une durée beaucoup plus courte. Une analyse de Fourier est alors inadéquate, car celle-ci perd la localisation temporelle des signaux de fréquence donnée. Par ailleurs, elle peut devenir très lourde et particulièrement peu économique en terme d'opérations mathématiques, car elle impose le calcul de sommes infinies.

La limitation d'une analyse de Fourier réside en réalité dans le fait qu'elle force à choisir entre le temps et la fréquence ; nous avons soit une

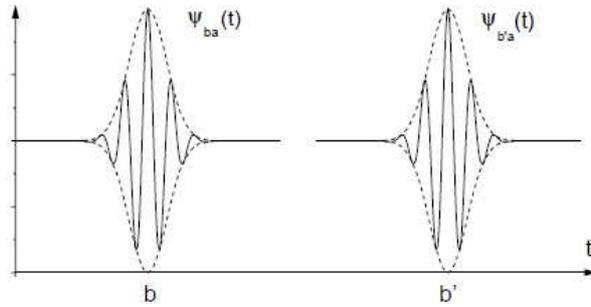


FIGURE 3.1 – Variation de la position temporelle par l'intermédiaire de b [11]

information purement temporelle $s(t)$, soit purement fréquentielle $\widehat{s}(\xi)$, les deux représentations étant naturellement équivalentes en raison de l'unitarité de la transformation de Fourier. C'est la raison pour laquelle les analystes ont développé une méthode de représentation des signaux reposant sur deux paramètres [19] : un paramètre a relatif à la fréquence et un paramètre b associé à la position temporelle. Si nous souhaitons de plus que la description soit linéaire, la représentation temps-fréquence d'un signal $s(t)$ sera donc de la forme :

$$s(t) \mapsto S(b, a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi_{ba}(t)} s(t) dt. \quad (3.51)$$

Parmi les représentations possibles de ce genre, deux d'entre elles ont un intérêt particulier [4, 10] : la transformée de Fourier à fenêtre (Windowed Fourier Transform-WFT), parfois appelée "transformée de Fourier à court terme" (Short Term Fourier Transform-STFT), et la transformée en ondelettes (Wavelet Transform-WT) qu'on va aborder dans le chapitre suivant. La différence entre les deux réside dans l'interprétation du paramètre a ; dans les deux cas, b agit simplement comme une translation temporelle (voir Figure 3.1) [11].

La transformée de Fourier à fenêtre fait intervenir une fonction $\psi_{ba}(t)$ de la forme :

$$\psi_{ba}(t) = e^{i(t-b)/a} \psi(t-b) \quad (3.52)$$

où $\psi(t)$ est une fonction qui détermine la fenêtre. La dépendance en a joue le rôle de modulation ($1/a$ a les dimensions d'une fréquence) ; ainsi

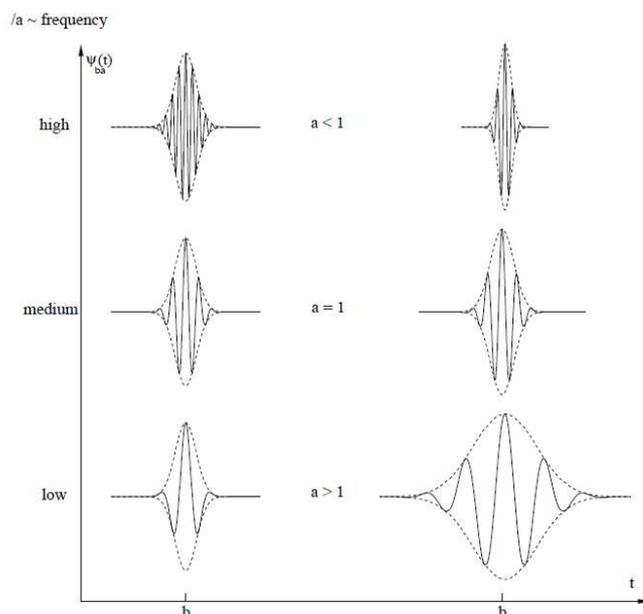


FIGURE 3.2 – Action du paramètre a dans le cas d'une WFT (a) ou d'une WT (b) [10]

pour une fenêtre de largeur donnée, plus a est petit et plus le nombre d'oscillations est élevée (voir Figure 3.2) [10].

Un choix classique de la fenêtre est celui d'une gaussienne :

$$\psi(t) = Ce^{-\alpha t^2}, C > 0, \alpha > 0. \quad (3.53)$$

Cette transformation est connue également sous le nom de transformée de Fourier à court terme.

Donc, l'analyse de Fourier à court terme est une analyse de Fourier sur tranches temporelles du signal (supposées localement stationnaires). Le paramètre b permet d'analyser l'information à tous les instants. La notion de fréquence dépendra ici du choix de la fenêtre analysante $\psi(t)$ et de sa longueur. D'où si la fenêtre $\psi(t)$ est un *rectangle* étroit, nous aurons une mauvaise localisation fréquentielle, tandis que si nous avons une gaussienne, nous aurons la meilleure localisation temps-fréquence.

Ce phénomène trouve une explication du fait qu'il est impossible de trouver en pratique une fenêtre ψ qui soit bien localisée à la fois en temps

et en fréquence, autrement dit, il n'existe aucune fonction d'énergie finie qui soit à support compact à la fois en temps et en fréquence, et ceci est justifié par le théorème de Fourier qui interdit à un signal donné d'avoir une localisation arbitrairement précise en temps et en fréquence. Autrement dit, si une fonction $s(t)$ non nulle est à support compact, alors sa transformée de Fourier ne peut s'annuler sur tout un intervalle et vice-versa.

Proposition 3.9 (Principe d'incertitude de Fourier) *Pour toute fonction $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ et pour tous $\xi_0, t_0 \in \mathbb{R}$, on a*

$$\frac{1}{16\pi^2} \leq \int_{\mathbb{R}} |t - t_0| |s(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}} |\xi - \xi_0| |\widehat{s}(\xi)|^2 d\xi. \quad (3.54)$$

L'égalité (l'extrême) a lieu pour les gaussiennes modulées par une sinusoïde, à l'opposé, les mesures de Dirac sont infiniment bien localisées en temps et complètement délocalisées en fréquence.

Remarque 3.10 Si on note par

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \int t |s(t)|^2 dt : \text{l'instant moyen} \\ (\Delta t)^2 &= \int (t - \bar{t})^2 |s(t)|^2 dt : \text{variance en temps} \\ \bar{\xi} &= \int \xi |\widehat{s}(\xi)|^2 d\xi : \text{fréquence moyenne} \\ (\Delta \xi)^2 &= \int (\xi - \bar{\xi})^2 |\widehat{s}(\xi)|^2 d\xi : \text{variance en fréquence,} \end{aligned}$$

le principe d'incertitude s'écrit :

$$\Delta t \Delta \xi \geq \frac{1}{4\pi}. \quad (3.55)$$

Le grand handicap de la transformée de Fourier à court terme est que la longueur de la fenêtre ne varie pas, d'où l'idée de la notion de dilation de la fenêtre avec la transformée en ondelettes.

Chapitre 4

Analyse continue en ondelettes

4.1 Introduction

Tout comportement du signal concernant un intervalle de temps beaucoup plus court que la longueur de la fenêtre est sous-localisé dans le temps, il en va de même pour des comportements du signal beaucoup plus courts que la longueur de la fenêtre. Cela rend la transformation de Fourier à fenêtre inefficace pour l'analyse de signaux réguliers dans le temps, mais très rapides ou très lents par rapport à la taille de la fenêtre. Puisque l'obtention d'une réponse localisée dans le temps implique l'introduction d'une échelle de grandeur dans l'analyse (la *taille de la fenêtre*), il faut essayer de mettre au point une méthode de reconstruction qui soit indépendante de cette échelle. La solution à ce problème porte le nom de **transformation en ondelettes**.

A l'image de la transformée de Fourier, la transformée continue en ondelettes (CWT) définit une nouvelle description pour une fonction f appartenant à un certain espace de Hilbert \mathfrak{H} . Cependant, à l'inverse d'une représentation fréquentielle pure, la CWT de cette fonction examine simultanément son "contenu" spatial et en échelle, la dépliant dans un espace plus grand que l'espace initial.

Pratiquement, ce processus se réalise par la comparaison de f avec des transformations affines d'une fonction fondamentale, dite *ondelette mère*. Ces transformations ne sont pas choisies au hasard, elles forment généralement un groupe et dépendent de l'espace où vit la fonction analysée [10, 31, 63]. Elles contiennent une notion de dilatation essentielle

à la paramétrisation en échelle de la transformée. Nous allons détailler la théorie menant à la transformée continue en ondelettes unidimensionnelles ($\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R})$).

4.2 Transformée continue en ondelettes sur $L^2(\mathbb{R})$

4.2.1 Transformée en ondelettes à une dimension

Attachons-nous en particulier à la description des transformées en ondelettes à une dimension. Il en existe en effet plusieurs versions :

- la transformée en ondelettes continue (CWT),
- la version discrétisée de la CWT,
- la transformée en ondelettes discrète (DWT).

La CWT joue le même rôle que la transformée de Fourier et convient particulièrement à l'analyse de signaux, alors que la DWT, analogue à la transformée de Fourier discrète (DFT), est plus appropriée à la compression de données et à la reconstruction de signaux [10].

4.2.2 Principe

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ou signal, d'énergie finie, c'est-à-dire $f \in \mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R})$. Le contenu de f peut être réalisé par la comparaison de cette dernière avec une fonction appelée ondelette mère $\psi \in \mathfrak{H}$ connue. Ce processus se réalise par un produit scalaire, au sens de \mathfrak{H} , créant ainsi un coefficient

$$W_\psi f = \langle \psi | f \rangle = \int_{\mathbb{R}} dt \overline{\psi(t)} f(t), \quad (4.1)$$

où la barre dénote la conjugaison complexe. $W_\psi f$ ne donne qu'une information très partielle sur f : la similarité de cette dernière avec ψ . Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$|W_\psi f| \leq \|f\| \|\psi\|, \quad (4.2)$$

l'égalité n'étant vérifiée que si f est proportionnelle à ψ . Si le support $A \subset \mathbb{R}$ de ψ est compact, le comportement de f sur le complémentaire $\mathbb{C}A$ est inatteignable par cette expérience comparative. Les variations de f seront moyennées sur A induisant de nouveau une perte d'information.

Il semble donc naturel de transformer f avant sa comparaison afin de parcourir l'ensemble des comportements réalisables par celle-ci. Sur

la droite \mathbb{R} , les transformations naturelles sont celles du groupe affine $G_{\text{aff}} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, [10, 28, 29], c'est-à-dire le groupe formé par les translations et les dilatations. Ce groupe agit sur $L^2(\mathbb{R})$ à l'aide d'une représentation $U : G_{\text{aff}} \rightarrow \mathfrak{H}$ telle que

$$f_{b,a}(t) = [U(b,a)f](t) = \frac{1}{\sqrt{a}} f\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (4.3)$$

avec $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $(b,a) \in G_{\text{aff}}$. Nous aurons les fonctions $f_{b,a}$ qui sont L^2 -normalisées, c'est-à-dire, $\|Uf\| = \|f\|$.

Nous pouvons définir les coefficients

$$(W'_\psi f)(b,a) = \langle \psi | U(b,a)f \rangle. \quad (4.4)$$

Il est difficile de transformer la fonction f a priori inconnue. En exigeant au préalable que U soit unitaire, c'est-à-dire telle que

$$\langle U(b,a)h | U(b,a)g \rangle = \langle h | g \rangle, \quad (4.5)$$

pour tout $g, h \in \mathfrak{H}$, il est plus aisé de transformer ψ et de changer la place de U au sein du produit scalaire (4.4). Ceci donne lieu aux nouveaux coefficients

$$(W_\psi f)(b,a) = \langle \psi_{b,a} | f \rangle = (W'_\psi f)((b,a)^{-1}), \quad (4.6)$$

avec

$$[U(b,a)\psi](t) = \psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \quad (4.7)$$

Suivant l'idée que ψ mesure f , ce dernier changement consiste à modifier l'instrument de mesure plutôt que l'objet de l'analyse et, donc de passer d'un point de vue actif de transformation à un point de vue passif [36].

Si ψ est bien localisée autour de l'origine, $\psi_{b,a}$ est centrée sur b avec une étendue proportionnelle à a . La valeur d'un coefficient $(W_\psi f)(b,a)$ est liée au comportement de f en fonction de b et a .

Ces deux paramètres sont nommés respectivement paramètre de **position** et paramètre d'**échelle**.

Sous certaines conditions appliquées à ψ , l'ensemble des coefficients $(W_\psi f)(b,a)$ caractérise univoquement f et constitue la transformée continue en ondelettes (**CWT**) de cette dernière.

4.2.3 La transformée continue en ondelettes CWT

Conditions d'existence et propriétés génériques

Sur base de la définition fondamentale d'une représentation temps-fréquence et du choix particulier de la fonction ψ , la transformation fondamentale s'écrit [43, 63] :

$$(W_{\psi}s)(b, a) = S(b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} s(t) dt. \quad (4.8)$$

L'ondelette ψ doit vérifier un certain nombre de conditions essentielles :

- On supposera que $\psi(t)$ (et donc $\widehat{\psi}(\omega)$) est de carré intégrable, autrement dit qu'il s'agit d'un signal d'énergie finie ;
- $\psi(t)$ doit vérifier la condition d'admissibilité, qui assure l'inversibilité de la transformation :

$$0 < c_{\psi} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty. \quad (4.9)$$

En pratique, cette condition se réduit à l'hypothèse que la fonction soit de moyenne nulle, car l'équation précédente impose

$$\widehat{\psi}(0) = 0 = \int \psi(t) dt$$

et donc $\psi(t)$ doit être une fonction oscillante.

- $\psi(t)$ et $\widehat{\psi}(\omega)$ doivent toutes deux être localisées. Certaines conditions additionnelles sont souhaitables dans certains cas, mais non indispensables.
- On peut aussi demander que la fonction $\psi(t)$ présente un certain nombre de moments nuls :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) t^n dt = 0, n = 0, 1, \dots, N. \quad (4.10)$$

Cette propriété améliore la détection de singularités dans le signal, car une telle ondelette ne **voit** pas les polynômes de degré $\leq N$, [7, ?, 43] en particulier la partie régulière du signal (la moins intéressante!). En effet, si (4.10) est respectée, pour tout polynôme

p de degré N ,

$$\begin{aligned} (W_\psi p)(b, a) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(at+b) \sqrt{a} \overline{\psi(t)} dt \\ &= \sqrt{a} \left[\int_{-\infty}^{\infty} p_1(t) \overline{\psi(t)} dt \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

où $p_1(t) = p(at+b)$ est un polynôme de degré N .

- Très souvent, on souhaite également que $\psi(t)$ soit progressive, c'est-à-dire que $\widehat{\psi}(\omega)$ soit réelle et $\widehat{\psi}(\omega) = 0$ pour $\omega \leq 0$. On qualifiera alors ψ de signal analytique, ou fonction de Hardy.

Si ces conditions sont respectées, alors l'ondelette $\psi(t)$ génère une transformation

$$W_\psi : s(t) \mapsto S(b, a)$$

qui fournit une bonne analyse du signal et qui en assure une bonne reconstruction

$$S(b, a) \mapsto s(t).$$

Exemples d'ondelettes

En pratique, le choix de l'ondelette n'est pas crucial. En effet, on cherche une ondelette qui offre un bon compromis entre la résolution temporelle et fréquentielle, et un tel choix dépend beaucoup de l'objectif posé [10, 22].

Des critères supplémentaires tels que la régularité, symétrie, décroissance rapide à l'infini peuvent être nécessaires. On va rappeler quelques exemples historiques d'ondelettes analysantes ainsi que quelques unes de leurs propriétés. La transformée de Fourier est universelle face aux signaux qu'elle décompose. A l'inverse, la transformée continue en ondelettes explore le contenu d'une fonction à l'aide d'une ondelette mère jouant le rôle d'une lentille d'observation. Cette dernière doit donc être choisie en fonction de la tâche à réaliser.

En premier, on a la classe des ondelettes réelles. Un exemple est le *chapeau Mexicain*, ou ondelette de Marr, issu du laplacien d'une gaussienne. C'est une ondelette réelle qui doit son nom à sa forme. En di-

mension 1, elle est simplement la dérivée seconde de la gaussienne,

$$\psi_H(t) = -\frac{d^2}{dt^2}e\left(-\frac{t^2}{2}\right) \quad (4.11)$$

$$= (1-t^2)e\left(-\frac{t^2}{2}\right) \quad (4.12)$$

$$\widehat{\psi}_H(\omega) = \omega^2 e^{-\omega^2}. \quad (4.13)$$

Cette ondelette appartient à l'espace de Schwartz S , elle est symétrique, ce qui permet de ne pas introduire des décalages (déphasages) dans la transformée en ondelettes, contrairement à des ondelettes non symétriques (comme le sont les ondelettes orthogonales à support compact de Daubechies) [22, 59]. Elle est particulièrement adaptée à la détection des discontinuités. Il existe aussi la différence de gaussiennes (DOG), définie par

$$\psi(t) = e\left(-\frac{t^2}{2}\right) - \frac{1}{\alpha}e\left(-\frac{t^2}{2\alpha^2}\right), \quad (4.14)$$

où α est généralement fixé à 1.25. Ces deux ondelettes possèdent respectivement deux et un moments nuls et sont utiles pour la détection de singularités dans un signal.

Il existe aussi les ondelettes complexes, telle l'*ondelette de Morlet*. L'ondelette de Morlet a un grand intérêt dans l'étude des signaux sismiques. Elle est inspirée du signal élémentaire de Gabor et elle est obtenue par la modulation d'une gaussienne.

$$\psi_M(t) = e^{(i\omega_0 t)}e\left(-\frac{t^2}{2\sigma_0^2}\right) + corr. \quad (4.15)$$

$$\widehat{\psi}_M(\omega) = \sigma_0 e\left(-\frac{[(\omega-\omega_0)\sigma_0]^2}{2}\right) + corr. \quad (4.16)$$

Les termes correctifs ajoutés assurent l'admissibilité de la fonction ; ils deviennent cependant négligeables pour une valeur de ω_0 suffisamment élevée (typiquement $\sigma_0\omega_0 > 5.5$). Sans terme correctif, il s'agit simplement de la fonction initialement utilisée par Gabor pour introduire la **WFT**.

L'ondelette de Morlet (et donc aussi sa transformée de Fourier) a la propriété d'appartenir à l'espace de Schwartz S (espace des fonctions infiniment dérivables et à décroissance rapide), donc elle est bien localisée en espace et en fréquence et numériquement, on peut la considérer à support compact. De plus, elle est complexe, ce qui permet une analyse

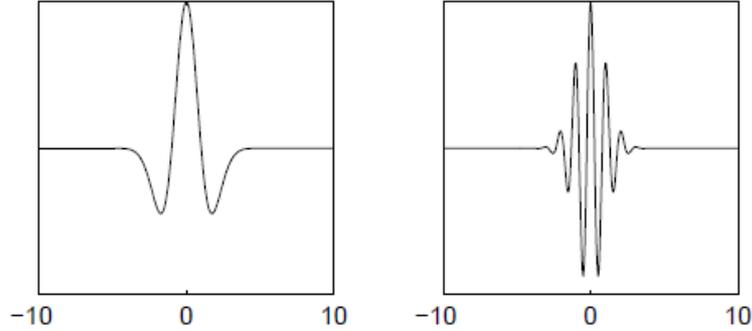


FIGURE 4.1 – Deux ondelettes classiques à une dimension : (gauche) le chapeau mexicain ; (droite) la partie réelle de l’ondelette de Morlet [36]

en module et argument et sa régularité permet de l’utiliser pour l’étude de la régularité des fonctions.

Avant de dégager les propriétés essentielles de la CWT, nous supposons encore que $\psi(t)$ est localisée essentiellement sur un support de largeur T autour de 0, alors que $\widehat{\psi}(\omega)$ présente un support essentiel (au sens numérique : $\widehat{\psi}$ est négligeable en dehors de cet intervalle) de largeur Ω autour de ω_0 . Il résulte pour les fonctions transformées un support essentiel de largeur aT autour de b pour $\psi_{b,a}(t)$ et de largeur Ω/a autour de ω_0/a pour $\widehat{\psi_{b,a}}(t)$ [48]. Ces considérations sur le support numérique essentiel sont illustrées pour l’ondelette de Morlet à la Figure 4.2. Il résulte de ces propriétés de support les constatations suivantes :

- si $a \gg 1$, $\psi_{b,a}$ est une fenêtre large, alors que sa transformée $\widehat{\psi}(b, a)$ est un pic étroit autour d’une faible valeur de fréquence ω_0/a , cette fonction sera sensible essentiellement aux basses fréquences.
- si $a \ll 1$, $\psi_{b,a}$ est une fenêtre étroite, alors que $\widehat{\psi}(b, a)$ est plus étendue, et centrée autour d’une fréquence ω_0/a élevée. Cette transformée convient mieux à une localisation précise dans le domaine temporel et à une analyse à haute fréquence.

La Figure 4.3 illustre ces caractéristiques. En particulier, on constate que l’outil développé parvient à reproduire la corrélation entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel : en combinant les propriétés de localisation et la condition de moyenne nulle, il apparaît que la CWT agit comme un filtre local dans les deux domaines, qui détecte et analyse les changements de régime et les singularités.

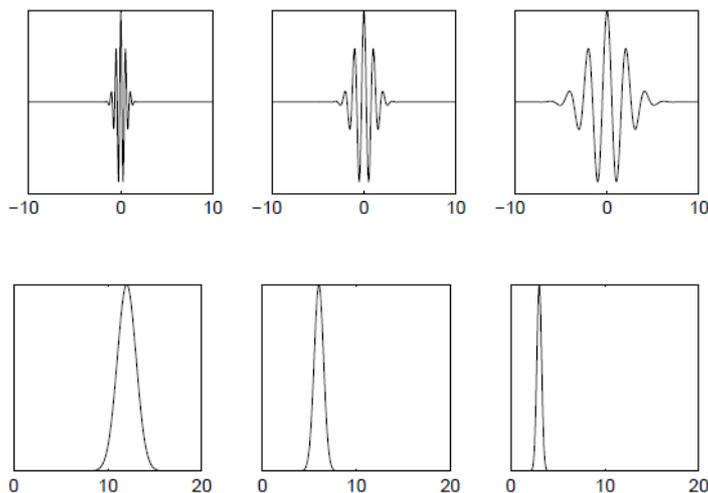


FIGURE 4.2 – Propriétés du support numérique essentiel de l’ondelette de Morlet ψ_M : pour $a = 0.5, 1, 2$ (de gauche à droite), $\psi_{b,a}$ présente une largeur de 3,6,12 respectivement (graphes du haut), alors que $\widehat{\psi}_{b,a}$ présente une largeur de 3,1.5,0.75 respectivement, et de pics à 12,6,3 (graphes du bas) [36]

Propriétés mathématiques

La formation des coefficients définis en (4.6) modifie la représentation d’un signal s : elle permet de passer d’une description dite temporelle à une description dite temps-échelle. Toutefois, lors de ce passage, il faut garantir qu’aucune information n’a été perdue, et, en fait, pouvoir reconstruire le signal s à partir de $W_\psi s$.

Remarque 4.1 Notons que, dans un contexte de théorie des groupes, exiger l’admissibilité de ψ c’est-à-dire (4.9) revient à imposer à la représentation U qu’elle soit de carré intégrable et donc aussi irréductible. Cette dernière propriété garantit que la famille $\{\psi_{b,a}, (b, a) \in G_{\text{aff}}\}$ n’engendre pas un sous-espace invariant de \mathfrak{H} mais la totalité de celui-ci.

Soit une ondelette ψ admissible dans le sens défini par l’équation (4.9) ; elle définit une CWT $W_\psi : s(t) \mapsto S(b, a)$ linéaire vérifiant les propriétés suivantes :

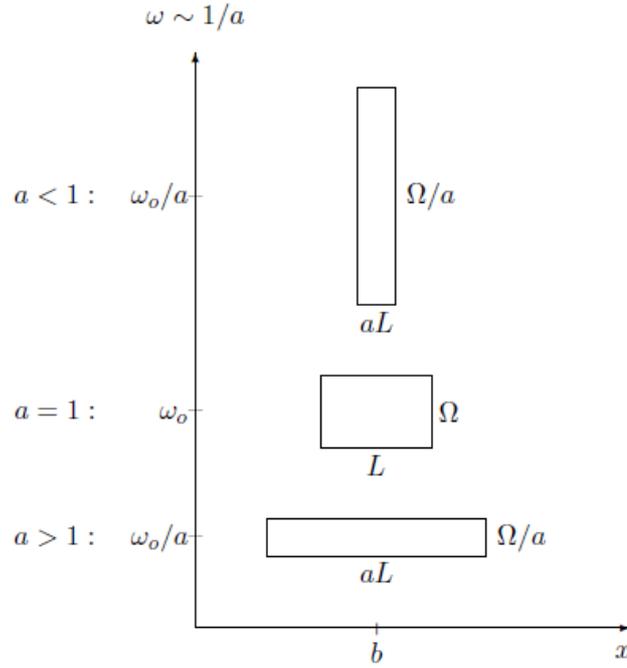


FIGURE 4.3 – Propriétés du support de $\psi_{b,a}$ et $\widehat{\psi}_{b,a}$ [11]

1. covariance sous translation temporelle :

$$W_\psi : s(t - t_0) \mapsto S(b - t_0, a); \quad (4.17)$$

2. covariance sous dilatation :

$$W_\psi : \frac{1}{\sqrt{a_0}} s\left(\frac{t}{a_0}\right) \mapsto S\left(\frac{b}{a_0}, \frac{a}{a_0}\right) \quad (4.18)$$

Ceci découle directement du fait que

$$\begin{aligned} \langle U(b, a)\psi | U(t_0, a_0)s \rangle &= \langle U(t_0, a_0)^{-1}U(b, a)\psi | s \rangle \\ &= \langle U\left(\frac{b - t_0}{a_0}, \frac{a}{a_0}\right) \psi | s \rangle \end{aligned}$$

par l'emploi de l'unitarité de la représentation U .

3. conservation de l'énergie du signal :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = c_\psi^{-1} \iint_{\mathbb{R}_+^2} |S(b, a)|^2 \frac{dad b}{a^2} \quad (4.19)$$

où c_ψ est défini par la relation d'admissibilité (4.9).

Partant de cette dernière condition, on peut interpréter $|S(b, a)|^2$ comme étant une densité d'énergie dans le demi-plan (b, a) muni d'une géométrie un peu différente de la géométrie euclidienne usuelle, puisqu'en effet la mesure $dadb/a^2$ est invariante sous translation et dilatation. La relation (4.19) signifie que W_ψ est une isométrie de l'espace des signaux $L^2(\mathbb{R})$ dans le sous-espace fermé $\mathfrak{H} \subset L^2(\mathbb{R}_+^2, dadb/a^2)$, ce que l'on peut encore exprimer en affirmant que l'ondelette ψ définit une résolution de l'identité :

$$c_\psi^{-1} \iint_{\mathbb{R}_+^2} |\psi_{b,a}\rangle \langle \psi_{b,a}| \frac{dad b}{a^2} = I. \quad (4.20)$$

Ces considérations assurent la possibilité d'une reconstruction du signal à partir de sa transformée en ondelettes, car sur l'image \mathfrak{H} , l'inverse de l'isométrie W_ψ est simplement donnée par l'opérateur adjoint W_ψ^* . Ce passage est alors exprimé par le théorème suivant.

Théorème 4.2 *Soit $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ une ondelette admissible. Toute fonction $s \in \mathfrak{H}$ peut être décomposée comme suit :*

$$s(t) = c_\psi^{-1} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \psi_{b,a}(t) S(b, a) \frac{dad b}{a^2}, \quad (4.21)$$

où l'égalité est vraie presque partout sur \mathbb{R} (convergence dans \mathfrak{H})

La preuve de ce théorème peut être trouvée dans [63]. La mesure $dadb/a^2$ apparaissant dans (4.21) est liée à la normalisation L^2 des ondelettes $\psi_{b,a}$. Il s'agit de la mesure (de Haar) invariante à gauche du groupe affine G_{aff} . Notons que dans le cas de la normalisation L^1 , cette mesure devient $dadb/a$, ce qui est la mesure de Haar invariante à droite de ce même groupe. Sous les hypothèses du théorème, la relation présentée en (4.6) définit en réalité une isométrie

$$W_\psi : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{G} \quad (4.22)$$

$$s \mapsto \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \langle \psi_{b,a} | s \rangle, \quad (4.23)$$

où $\mathfrak{G} = L^2(G_{\text{aff}}, \frac{dad b}{a^2})$. Il existe en effet une relation de Plancherel pour la CWT.

Corollaire 4.3 *Si $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ et si $c_\psi < \infty$, alors*

$$\|s\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{c_\psi} \iint_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} |(W_\psi s)(b, a)|^2 \frac{dadb}{a^2}. \quad (4.24)$$

Ce corollaire, qui s'obtient à partir de (4.21) exprime la conservation de l'énergie lors du changement de représentation. Il est clair que si $s \in \mathfrak{H}$, $W_s \in \mathfrak{G}$, et inversement. Le théorème (4.2) exprime que l'isométrie définie en (4.22) est inversible sur son image. Cette dernière est loin d'être étendue à la totalité de \mathfrak{G} . Intuitivement cela semble évident puisque W_s déplie une fonction à un paramètre sur un espace à deux dimensions. Pour mieux comprendre ce fait, il faut introduire la notion de noyau reproduisant.

Définition 4.4 *Soit $\psi \in \mathfrak{H}$ une ondelette admissible. Le **noyau reproduisant** associé est défini par*

$$K_\psi(b, a|b_0, a_0) = \frac{1}{c_\psi} \langle \psi_{b,a} | \psi_{b_0,a_0} \rangle, \quad (4.25)$$

pour $(b, a), (b_0, a_0) \in G_{\text{aff}}$.

Ce noyau correspond donc à la CWT de l'ondelette elle-même. En outre,

$$K_\psi(b, a|b_0, a_0) = K_\psi \left(0, 1 \mid \frac{b_0 - b}{a}, \frac{a_0}{a} \right), \quad (4.26)$$

grâce à la covariance de la transformée en ondelettes.

A ce noyau reproduisant est associé un opérateur intégral P_ψ tel que pour tout $T \in \mathfrak{G}$,

$$[P_\psi T](b', a') = \iint_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} K_\psi(b', a'|b, a) T(b, a) \frac{dadb}{a^2}. \quad (4.27)$$

Par la propriété (4.26), ce dernier correspond aussi à une convolution sur G_{aff} .

Le fait remarquable est que cet opérateur est idempotent, c.-à-d. $P_\psi P_\psi T = P_\psi T$. En effet,

$$\begin{aligned}
[P_\psi P_\psi T](b'', a'') &= \frac{1}{c_\psi^2} \iint_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} \iint_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} \frac{dad b da' db'}{a^2 a'^2} \\
&\quad \langle \psi_{b', a'} | \psi_{b'', a''} \rangle \langle \psi_{b, a} | \psi_{b', a'} \rangle T(b, a) \\
&= \frac{1}{c_\psi} \iint_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} \frac{dad b}{a^2} T(b, a) \langle \psi_{b, a} | \frac{1}{c_\psi} \\
&\quad \iint_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} \frac{da' db'}{a'^2} \langle \psi_{b', a'} | \psi_{b'', a''} \rangle \psi_{b', a'} \rangle \\
&= \frac{1}{c_\psi} \iint_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} \frac{dad b}{a^2} \langle \psi_{b, a} | \psi_{b'', a''} \rangle \\
&= [P_\psi T](b'', a'').
\end{aligned}$$

L'opérateur P_ψ est donc un projecteur sur l'espace \mathfrak{G}_ψ défini par

$$\mathfrak{G}_\psi = \{T \in \mathfrak{G} : P_\psi T = T\}. \quad (4.28)$$

Par un raisonnement analogue à celui démontrant l'idempotence de P_ψ , $W_\psi s$ est la CWT d'une fonction $s \in \mathfrak{H}$ si et seulement si $W_s \in \mathfrak{G}_\psi$. En particulier,

$$(W_\psi s)(b', a') = \iint_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} \frac{dad b}{a^2} K_\psi(b', a' | b, a) (W_\psi s)(b, a). \quad (4.29)$$

La redondance est donc apparente puisque la valeur de la transformée en un point (b, a) de G_{aff} est complètement déterminée par l'ensemble des points du support de $K_\psi(\cdot, \cdot | b, a)$.

4.3 Discrétisation de la CWT

On voit que le contenu d'information de la CWT est redondant, ce que l'on peut concevoir facilement puisqu'un signal à une dimension (le temps) est décrit par une représentation à deux dimensions (temps et fréquence). Il doit donc être possible de tirer le contenu complet à partir seulement d'un sous-ensemble de ces données, par exemple en les choisissant à l'aide d'une discrétisation appropriée [18, 23].

Adoptant la notation en terme d'opérateurs et de projections, la relation (4.8) qui définit la CWT peut s'écrire :

$$S(b, a) = \langle \psi_{b, a} | s \rangle. \quad (4.30)$$

Soit $\Gamma = \{a_j, b_k, j, k \in \mathbb{Z}\}$, un réseau discret dans le demi-plan (a, b) . Γ permettra une discrétisation correcte si on peut représenter la CWT d'un signal arbitraire au moyen de la relation

$$s(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle \psi_{jk} | s \rangle \widetilde{\psi}_{jk}(t) \quad (4.31)$$

où $\psi_{jk} \equiv \psi_{b_k a_j}$ et $\widetilde{\psi}_{jk}$ peut être construit à partir de ψ_{jk} . On souhaite que cette construction soit exacte, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas de perte d'information par rapport à la reconstruction continue. Par ailleurs, cette reconstruction doit être numériquement stable, ce qui signifie qu'une erreur dans les coefficients $\langle \psi_{jk} | s \rangle$ ne peut conduire qu'à une erreur faible également dans le signal $s(t)$ reconstruit. Cette exigence est mathématiquement exprimée par la relation

$$A \|s\|^2 \leq \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle \psi_{jk} | s \rangle|^2 \leq B \|s\|^2 \quad (4.32)$$

avec $A > 0$ et $B < \infty$. On dit alors que l'ensemble ψ_{jk} constitue un *repère* (angl. *frame*) et A et B les *bornes* du repère.

- Si $A = B > 1$, on parle de repère strict (*tight frame*).
- Si $A = B = 1$, il s'agit d'une base orthonormée (pour autant que $\|\psi_{jk}\| = 1$).

D'un point de vue pratique, le repère choisi sera approprié s'il permet une convergence rapide de la relation (4.31). Le choix de ce repère doit prendre en compte le caractère non-euclidien du demi-plan (b, a) déjà évoqué précédemment [3], et en particulier le réseau Γ doit être invariant sous translation et dilatation discrètes; on choisit dès lors :

- pour l'échelle des fréquences, $a_j = a_0^j, j \in \mathbb{Z}$ avec $a_0 > 1$;
- pour l'échelle temporelle, $b_k = k b_0 a_0^j, j, k \in \mathbb{Z}$.

Il en résulte, pour l'ondelette discrétisée :

$$\psi_{jk}(t) = a_0^{-j/2} \psi(a_0^{-j} t - k), j, k \in \mathbb{Z}. \quad (4.33)$$

Le choix le plus commun est $a_0 = 2$ et $b_0 = 1$, conduisant au réseau dyadique (voir Figure 4.4)

$$\psi_{jk}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j} t - k), j, k \in \mathbb{Z}. \quad (4.34)$$

Le point important est que, en pratique, un bon repère est quasiment aussi bon qu'une base orthonormale. Par "bon repère", on entend

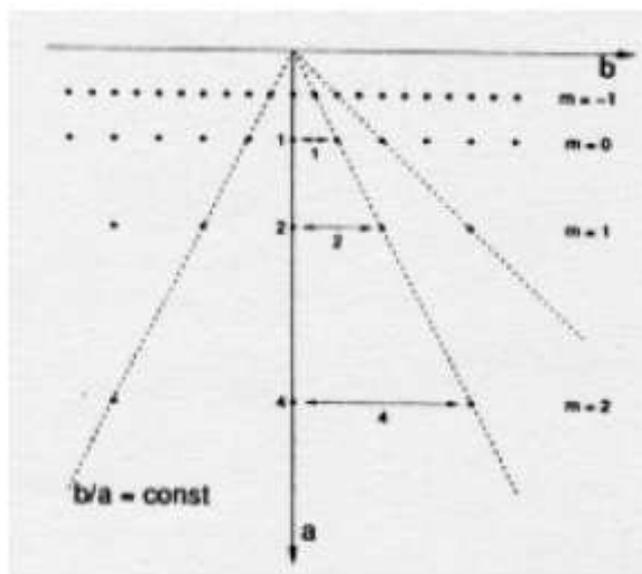


FIGURE 4.4 – Visualisation d'un réseau dyadique [11]

que le développement (4.31) converge suffisamment vite et qu'on peut donc le tronquer après un petit nombre de termes en gardant une bonne précision. L'analyse détaillée de Daubechies montre que c'est le cas si $|B/A-1| \ll 1$, donc en particulier si le repère est strict. Ceci est essentiel, car la discrétisation de la CWT ne mène presque jamais à une base orthonormale. En effet, des fonctions ψ très générales vérifiant la condition d'admissibilité (4.9) peuvent fournir un bon repère, mais pas une base orthonormale, car les fonctions ψ_{jk} ne sont en général pas orthogonales. Ainsi par exemple, les deux ondelettes principales, le chapeau mexicain et l'ondelette de Morlet, conduisent toutes deux à de bons repères, qui sont cependant non-stricts.

Dans ce cas, l'algorithme le mieux indiqué est l'algorithme à trous [20], en raison de la non orthogonalité des familles d'ondelettes. Un tel algorithme est particulièrement adapté aux applications en sismique où la redondance est souhaitable.

4.4 Arêtes et Squelette

Les signaux géophysiques réels sont souvent bruités, ce qui fait que leur transformée en ondelettes (**WT**) est difficile à interpréter. Cependant, une exploitation astucieuse de la redondance de la CWT est souvent utilisée pour contourner ce problème [37, 44]. Cette technique consiste à utiliser le squelette de la CWT au lieu de son module. Généralement parlant, le squelette est une collection de lignes, appelées *arêtes*, qui sont approximativement des lignes de maxima locaux. Ce concept est facile à visualiser dans deux situations extrêmes. Supposons premièrement que le signal $s(t)$ consiste en une singularité $\gamma_\alpha(x - x_0)$, de l'ordre α , à l'instant x_0 . Ici, la fonction de singularité γ_α est définie comme suit :

$$\gamma_\alpha(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x \leq x_0, \\ (x - x_0)^\alpha, & x > x_0. \end{cases}$$

L'indice α est en fait l'indice de l'homogénéité ou l'exposant de régularité de Lipschitz. Ainsi, la fonction δ a $\alpha = -1$. Donc, on a

$$\frac{d^{\alpha+1}\gamma_\alpha}{dx^{\alpha+1}}(x - x_0) = \Gamma(\alpha + 1)\delta(x - x_0). \quad (4.35)$$

Supposons que l'ondelette soit la $n^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction positive lisse ϕ , telle que $\psi(x) = \frac{d^n}{dx^n}\phi(x)$, avec $n \geq \alpha + 1$ (typiquement une dérivée d'une Gaussienne, comme le chapeau mexicain). Donc la CWT de γ_α par rapport à ψ donne :

$$S_{\gamma_\alpha}(b, a) = \Gamma(\alpha + 1)a^\alpha \frac{d^{n-\alpha-1}\phi}{dx^{n-\alpha-1}}\left(\frac{x_0 - b}{a}\right). \quad (4.36)$$

Supposons maintenant que le module de la $(n - \alpha - 1)^{\text{ième}}$ dérivée de ϕ ait N maxima $\{\phi_l, l = 1, \dots, N\}$ aux positions $\{x_l, l = 1, \dots, N\}$. Alors, pour chaque a , le module $|S_{\gamma_\alpha}(b, a)|$ a N maxima localisés aux positions $\{b_l = ax_l + x_0, l = 1, \dots, N\}$, qui convergent vers x_0 quand $a \rightarrow 0$. Plus encore, les maxima de $|S_{\gamma_\alpha}(b, a)|$ se trouvent sur les N lignes, appelées *arêtes verticales* $\{b = ax_l + x_0, l = 1, \dots, N\}$, qui convergent vers la singularité x_0 du signal, et le module de $|S_{\gamma_\alpha}(b, a)|$ le long de la $l^{\text{ième}}$ arête se comporte comme a^α :

$$|S_{\gamma_\alpha}(b = ax_l + x_0, a)| = \Gamma(\alpha + 1)a^\alpha \phi_l. \quad (4.37)$$

Partant, la puissance α de singularité peut être lue comme la pente du graphe $\log |S_{\gamma_\alpha}(b, a)|$ en fonction de $\log a$, ce qui donne :

$$\ln |S_{\gamma_\alpha}(ax_l + x_0, a)| \sim \alpha \ln a + \ln \phi_l. \quad (4.38)$$

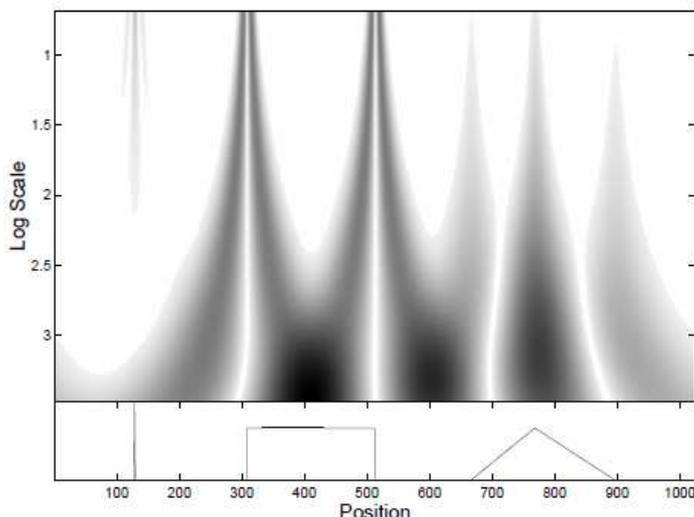


FIGURE 4.5 – La CWT avec l’ondelette chapeau mexicain du signal bumps vu en bas du panneau [10]

Cette méthode, introduite par Mallat et Hwang [44], a été développée considérablement pour l’analyse des fractales par Arnéodo et ses collaborateurs [51] sous le nom de Maxima du Module de la transformée en ondelettes (en anglais, Wavelet Transform Modulus Maxima (**WTMM**)). Le point important est que la restriction de la CWT à son squelette (ensemble des arêtes) caractérise complètement le signal. Donc, en pratique, il est suffisant de calculer le squelette [32].

Pour donner un exemple, on prend le signal “bumps”, et on calcule le squelette de sa transformée en ondelettes. Le résultat, présenté dans la Figure 4.5 confirme clairement l’analyse.

Le même signal vu en utilisant cette fois-ci le squelette, est présenté dans la Figure 4.6 [10].

4.5 Corrélation statistique

4.5.1 Introduction

En probabilité et en statistique, étudier la **corrélation** entre deux ou plusieurs variables aléatoires ou statistiques, c’est étudier l’intensité

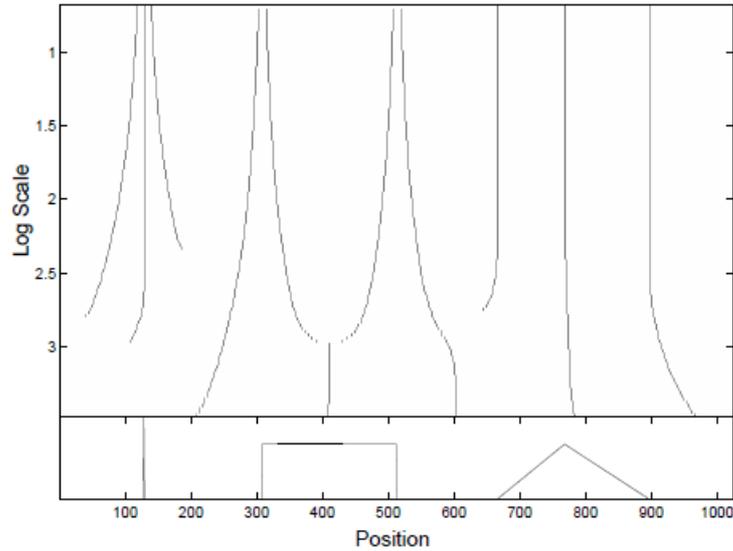


FIGURE 4.6 – Le squelette de la CWT du signal `bumps` vu en bas du panneau [10]

de liaison qui peut exister entre ces variables. La liaison recherchée est une relation affine. Dans le cas de deux variables, il s’agit de la régression linéaire [11].

Une mesure de cette corrélation est obtenue par le calcul du **coefficient de corrélation linéaire**. Ce coefficient est égal au rapport de leur covariance et du produit non nul de leurs écarts types (en anglais “standard deviations”). Le coefficient de corrélation est compris entre -1 et 1. Cette notion de coefficient de corrélation linéaire sera étendue à la transformée en ondelettes.

4.5.2 Droite et coefficient de corrélation

Calculer le coefficient de corrélation entre deux variables revient à chercher à résumer la liaison qui existe entre les variables à l’aide d’une droite. On parle alors d’un ajustement linéaire.

Comment calculer les caractéristiques de cette droite ? En faisant en sorte que l’erreur que l’on commet en représentant la liaison entre nos variables par une droite soit la plus petite possible. Le critère formel le

plus utilisé, mais pas le seul possible, est de minimiser la somme de toutes les erreurs effectivement commises au carré. On parle alors d'ajustement selon la méthode des moindres carrés ordinaires. La droite résultant de cet ajustement s'appelle une droite de régression. Plus la qualité globale de représentation de la liaison entre nos variables par cette droite est bonne, et plus le coefficient de corrélation linéaire associé l'est également. Il existe une équivalence formelle entre les deux concepts.

Le coefficient de corrélation linéaire de Bravais-Pearson est donné par la formule :

$$r_p = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (4.39)$$

On peut calculer le coefficient de corrélation entre deux séries de même longueur. On suppose qu'on a les tableaux de valeurs suivants :

$$X(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ et } Y(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

pour chacune des deux séries. Alors, pour connaître le coefficient de corrélation liant ces deux séries, on applique la formule suivante :

$$r_p = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}} \quad (4.40)$$

Si r vaut zéro, les deux courbes ne sont pas corrélées. Les deux courbes sont d'autant mieux corrélées que r est loin de 0 (proche de -1 ou 1) ; avec :

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}), \quad (4.41)$$

où

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \text{ est l'écart-type de } X \quad (4.42)$$

et

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2} \text{ est l'écart-type de } Y, \quad (4.43)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \text{ est la moyenne de } X \text{ et } \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \text{ est la moyenne de } Y. \quad (4.44)$$

Pour ce qui est de l'interprétation, le coefficient de corrélation est égal à 1 dans le cas où l'une des variables est fonction affine croissante de l'autre variable, à -1 dans le cas où la fonction affine est décroissante. Les valeurs intermédiaires renseignent sur le degré de dépendance linéaire entre les deux variables. Plus le coefficient est proche des valeurs extrêmes -1 et 1, plus la corrélation entre les variables est forte ; on emploie simplement l'expression "fortement corrélées" pour qualifier les deux variables. Une corrélation égale à 0 signifie que les variables sont linéairement indépendantes. Le coefficient de corrélation n'est pas sensible aux unités de chacune des variables. Ainsi, par exemple, le coefficient de corrélation linéaire entre l'âge et le poids d'un individu sera identique que l'âge soit mesuré en semaines, en mois ou en années. En revanche, ce coefficient est extrêmement sensible à la présence de valeurs aberrantes ou extrêmes dans l'ensemble des données (valeurs très éloignées de la majorité des autres, pouvant être considérées comme des exceptions).

En considérant les deux séries de valeurs :

$$X(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ et } Y(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

comme des vecteurs dans un espace à n dimensions, on peut les remplacer par des vecteurs centrés : $X(x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x})$ et $Y(y_1 - \bar{y}, y_2 - \bar{y}, \dots, y_n - \bar{y})$, le cosinus de l'angle α entre ces vecteurs est donné par la formule suivante, qui est le produit scalaire normé :

$$\cos(\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}}. \quad (4.45)$$

Donc $\cos(\alpha) = r_p$. Le coefficient de corrélation n'est autre que le cosinus entre les deux vecteurs centrés.

- Si $r = 1$, l'angle $\alpha = 0$, les deux vecteurs sont colinéaires (parallèles).
- Si $r = 0$, l'angle $\alpha = \pi/2$, les deux vecteurs sont orthogonaux.
- Si $r = -1$, l'angle $\alpha = \pi$, les deux vecteurs sont colinéaires de sens opposé.

4.5.3 Valeurs moyennes statistiques et temporelles

Pour effectuer une statistique temporelle sur un signal, il faut considérer l'ensemble des représentations possibles à des instants t_1, t_2, \dots, t_n donnés.

- La moyenne statistique est donnée par

$$\mu_X(t_i) = E[X(t_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp_1(x, t_i)dx, \quad (4.46)$$

avec p_1 la densité de probabilité au premier ordre.

- La moyenne quadratique est définie par

$$E[X^2(t_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2p_1(x, t_i)dx. \quad (4.47)$$

- La fonction d'autocorrélation d'un même signal à deux instants t_1 et t_2 est donnée par

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1dx_2,$$

avec p_2 la densité de probabilité au second ordre.

- La fonction d'intercorrélation entre deux signaux évalués à des instants respectifs t_1 et t_2 est donnée par

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp_2(x, y; t_1, t_2) dx dy.$$

- La variance sur un signal $X(t_i)$ est naturellement définie par

$$\sigma_X^2(t_i) = E[(X(t_i) - \mu_X(t_i))^2] = E[X^2(t_i)] - \mu_X^2(t_i). \quad (4.48)$$

- La fonction d'intercovariance entre deux signaux évalués à des instants respectifs t_1 et t_2 est donnée par

$$C_{XY}(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu_X(t_1))(Y(t_2) - \mu_Y(t_2))]. \quad (4.49)$$

Si les données statistiques s'attachent à décrire l'ensemble des réalisations d'un signal en certaines valeurs de temps données, les données statistiques temporelles s'attachent à la description d'une réalisation donnée évoluant au cours du temps. Choisissons donc une représentation particulière $x_\lambda(t)$.

- La valeur moyenne temporelle est donnée par

$$\overline{x_\lambda(t+t_0)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_\lambda(t+t_0)dt. \quad (4.50)$$

Avec un changement de variable $t' = t_0 + t$, la moyenne temporelle ne dépend pas de l'origine du temps t_0 car

$$\begin{aligned}\overline{x_\lambda(t + t_0)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0 - T/2}^{t_0 + T/2} x_\lambda(t') dt' \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_\lambda(t') dt' \\ &= \overline{x_\lambda(t)}.\end{aligned}$$

Physiquement, la valeur moyenne représente la composante continue du signal.

- La valeur quadratique moyenne s'obtient naturellement par la relation

$$\overline{[x_\lambda(t + t_0)]^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x_\lambda(t_0 + t)]^2 dt = \overline{[x_\lambda(t)]^2}. \quad (4.51)$$

Comme la valeur moyenne au premier ordre, la valeur quadratique moyenne ne dépend pas de l'origine du temps. Sa valeur représente la puissance moyenne du signal appliquée sur une charge unitaire.

- La fonction d'autocorrélation temporelle est donnée par

$$\begin{aligned}\varphi_{xx}^{(\lambda)}(t_1, t_2) &= \overline{x_\lambda(t_1 + t)x_\lambda(t_2 + t)} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_\lambda(t_1 + t)x_\lambda(t_2 + t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1 - T/2}^{t_1 + T/2} x_\lambda(t')x_\lambda(t' + t_2 - t_1) dt \\ &\equiv \phi_{xx}^{(\lambda)}(t_2 - t_1).\end{aligned}$$

Il apparaît ainsi que la fonction d'autocorrélation ne dépend que de la différence de temps ($t_2 - t_1$). Notons au passage que les changements de variables $t' = t_1 + t$ et $t' = t_2 + t$ aboutissent au même résultat, ce qui permet d'écrire

$$\varphi_{xx}^{(\lambda)}(t_2 - t_1) = \varphi_{xx}^{(\lambda)}(t_1 - t_2) \quad (4.52)$$

- La fonction d'intercorrélation temporelle jouit de propriétés identiques :

$$\begin{aligned}
\varphi_{xy}^{(\lambda)}(t_1, t_2) &= \overline{x_\lambda(t_1 + t)y_\lambda(t_2 + t)} \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_\lambda(t_1 + t)y_\lambda(t_2 + t) dt \\
&\equiv \phi_{xy}^{(\lambda)}(t_2 - t_1).
\end{aligned}$$

Il faut cependant être attentif dans ce cas au changement de variable opéré; en effet, on montre de manière générale que $\phi_{xy}^{(\lambda)}(t_2 - t_1) \neq \phi_{xy}^{(\lambda)}(t_1 - t_2)$, mais en revanche $\phi_{xy}^{(\lambda)}(t_2 - t_1) = \phi_{yx}^{(\lambda)}(t_1 - t_2)$.

4.5.4 Processus stochastique et ergodique

Le processus markovien simple (du premier ordre) est le processus de complexité immédiatement supérieur par rapport au signal aléatoire pur dont le processus complet peut être décrit par la densité de probabilité au premier ordre. Ainsi, ce processus peut être complètement décrit par une densité de probabilité au second ordre $p_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$. La valeur x_n prise en un temps t_n se note

$$p_n(x_n; t_n | x_1, \dots, x_{n-1}; t_1, \dots, t_{n-1}) = p_2(x_n; t_n | x_{n-1}; t_{n-1}). \quad (4.53)$$

Sur base de la définition des probabilités conditionnelles, on obtient

$$\begin{aligned}
&p_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) \\
&= p_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}; t_1, \dots, t_{n-1}) p_2(x_n; t_n | x_{n-1}; t_{n-1}) \\
&= (p_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}; t_1, \dots, t_{n-2}) p_2(x_{n-1}; t_{n-1} | x_{n-2}; t_{n-2})) \\
&\quad p_2(x_n; t_n | x_{n-1}; t_{n-1}) \\
&= \dots \\
&= p_1(x_1, t_1) \prod_{k=2}^n p_2(x_k; t_k | x_{k-1}; t_{k-1}).
\end{aligned}$$

En vertu de la définition des probabilités conditionnelles, cette dernière relation équivaut à l'expression

$$p_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = p_1(x_1, t_1) \prod_{k=2}^n \frac{p_2(x_k, x_{k-1}; t_k, t_{k-1})}{p_1(x_{k-1}, t_{k-1})}. \quad (4.54)$$

En pratique, on ne dispose pas de toutes les réalisations d'un processus aléatoire, mais seulement d'une réalisation particulière $x_\lambda(t)$ à la fois. A partir de ces réalisations particulières, on peut obtenir des valeurs moyennes temporelles. Les processus ergodiques jouissent de l'agréable propriété que leurs valeurs moyennes statistiques sont égales aux valeurs moyennes temporelles; point n'est donc besoin de connaître l'ensemble de ses réalisations. Ces signaux vérifient donc :

$$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_\lambda(t) dt \iff E[X(t)] = \overline{x_\lambda(t)}. \quad (4.55)$$

Cette propriété reste valable également pour une fonction du signal $f(x(t))$, et par conséquent l'égalité des moyennes conduit à l'égalité des moyennes quadratiques et des fonctions de corrélation :

$$\begin{aligned} E[X^2(t)] &= \overline{[x_\lambda(t)]^2} \\ E[X(t_1)X(t_2)] &= \overline{x_\lambda(t_1+t)x_\lambda(t_2+t)} \\ E[X(t_1)Y(t_2)] &= \overline{x_\lambda(t_1+t)y_\lambda(t_2+t)} \end{aligned}$$

4.5.5 Valeurs moyennes des fonctions de variables aléatoires et coefficient de corrélation

La valeur moyenne de la fonction $Y = f(X)$ est définie par la relation

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} yp(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx. \quad (4.56)$$

On observe aussi que la valeur moyenne d'une somme de variables est la somme des valeurs moyennes des variables, sans aucune hypothèse restrictive :

$$E[X_1 \pm X_2] = E[X_1] \pm E[X_2] \quad (4.57)$$

et généralement

$$E\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] = \sum_{k=1}^n E[X_k]. \quad (4.58)$$

Par contre, dans le cas du produit, la relation devient :

$$E\left[\prod_{k=1}^n X_k\right] = \prod_{k=1}^n E[X_k], \quad (4.59)$$

si les variables sont indépendantes. Sinon, la connaissance de l'intercovariance des deux variables $C_{X_1X_2}$ permet d'écrire l'égalité suivante :

$$E[X_1X_2] = E[X_1]E[X_2] + C_{X_1X_2}. \quad (4.60)$$

Le **coefficient de corrélation** ρ est défini par la relation :

$$\rho \equiv \frac{C_{X_1X_2}}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} = \frac{E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2]}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}, \quad (4.61)$$

où $\sigma_{X_i}^2$ est la variance de la variable X_i . On peut montrer également que $-1 \leq \rho \leq 1$. Il est en général intéressant d'établir une relation entre les variables X_1 et X_2 ; la plus simple de ces relations étant la linéarité, on écrira

$$Y_2 = a + bX_1 \quad (4.62)$$

où Y_2 est la meilleure approximation de X_2 , c-à-d celle qui minimise l'erreur quadratique moyenne $\epsilon = E[(X_2 - Y_2)^2]$. Si l'on substitue à Y_2 sa définition et que l'on recherche le minimum de variation dans les paramètres a et b , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial a} &= 2E[-(X_2 - a - bX_1)] \\ &= 0 \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial b} &= 2E[-X_1(X_2 - a - bX_1)] \\ &= 0, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} E[X_2] - a - bE[X_1] &= 0 \\ E[X_1X_2] - aE[X_1] - bE[X_1^2] &= 0. \end{aligned}$$

Multipliant la première des deux relations par $E[X_1]$ et soustrayant le résultat à la seconde relation, on peut écrire :

$$E[X_2X_1] - E[X_2]E[X_1] = b(E[X_1] - E[X_1^2])^2 = b\sigma_{X_1}^2, \quad (4.63)$$

soit en vertu de la définition de ρ :

$$b = \rho \frac{\sigma_{X_2}}{\sigma_{X_1}}; \quad (4.64)$$

ainsi le coefficient de corrélation est directement relié à la pente de la droite qui exprime X_2 en fonction de X_1 comme l'illustre la Figure 4.7.

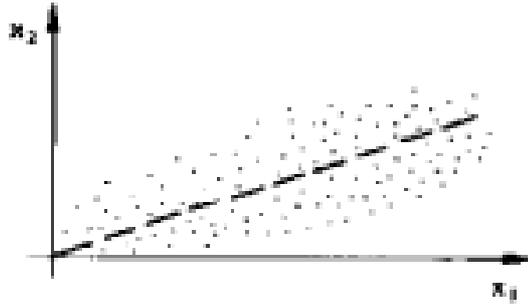


FIGURE 4.7 – Droite de régression présentant un coefficient de corrélation positif.

Si $X_2 = \pm X_1$, alors $\rho = \pm 1$; si les variables sont indépendantes, alors $\rho = 0$. Par contre si $\rho = 0$, on ne peut affirmer que les variables sont indépendantes, mais seulement qu'elles sont non corrélées, c-à-d que l'on ne peut établir de dépendance linéaire entre elles.

4.6 Densité spectrale de puissance

4.6.1 Définitions

A l'opposé des signaux déterministes, de carré intégrable, il est délicat de parler de puissance de signaux aléatoires, puisqu'en général ceux-ci se comportent de telle manière que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_{\lambda}(t)|^2 dt = \infty \quad (4.65)$$

(étant donné que le signal contient du bruit jusque $t \rightarrow \infty$). On peut cependant parler de densité spectrale de puissance si l'on tronque les signaux à un intervalle temporel T . On considère alors le signal

$$x_{\lambda}^{(T)}(t) = \begin{cases} x_{\lambda}(t) & \text{pour, } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{pour, } |t| > \frac{T}{2}. \end{cases}$$

La puissance moyenne du signal tronqué sera donnée par

$$P_\lambda^{(T)} = \frac{E_\lambda^{(T)}}{T} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x_\lambda(t)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} [x_\lambda^{(T)}(t)]^2 dt. \quad (4.66)$$

En notant $X_\lambda^{(T)}(\omega)$ la transformée de Fourier du signal tronqué, on peut encore écrire en vertu de l'égalité de Parseval :

$$P_\lambda^{(T)} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |X_\lambda^{(T)}(\omega)|^2 d\omega. \quad (4.67)$$

La densité spectrale de puissance du signal tronqué est définie comme étant

$$\Phi_\lambda^{(T)}(\omega) \equiv \frac{|X_\lambda^{(T)}(\omega)|^2}{T}, \quad (4.68)$$

de sorte que la puissance moyenne de $x_\lambda^{(T)}(t)$ est

$$P_\lambda^{(T)} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\lambda^{(T)}(\omega) d\omega. \quad (4.69)$$

Dans le cas où le signal a une durée infinie, on postule l'existence de la limite

$$P_\lambda^{(T)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\lambda^{(T)}(\omega) d\omega. \quad (4.70)$$

La puissance moyenne, c-à-d lorsqu'on ne restreint pas à une réalisation particulière, s'obtient en faisant une moyenne statistique sur la relation (4.70), ce qui conduit à définir la densité spectrale de puissance $\Phi(\omega)$:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} E \left[\Phi_\lambda^{(T)}(\omega) \right] d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) d\omega \quad (4.71)$$

où

$$\Phi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E \left[|X_\lambda^{(T)}(\omega)|^2 \right]}{T}. \quad (4.72)$$

4.6.2 Théorème de Wiener-Khintchine

La densité spectrale de puissance est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation. En effet, si l'on développe la définition de

la densité spectrale de puissance et qu'on applique une transformée de Fourier inverse sur ses éléments constituants, on obtient

$$\begin{aligned}
\Phi(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_\lambda^{(T)}(\omega)|^2]}{T} \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[X_\lambda^{*(T)}(\omega) X_\lambda^{(T)}(\omega)] \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} E\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_\lambda^{(T)}(t_1) e^{i\omega t_1} \int_{-\infty}^{\infty} x_\lambda^{(T)}(t_2) e^{-i\omega t_2} dt_1 dt_2\right] \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} E\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_\lambda^{(T)}(t_1) x_\lambda^{(T)}(t_2) e^{-i\omega(t_2-t_1)} dt_1 dt_2\right].
\end{aligned}$$

La moyenne statistique est alors effectuée après l'opération d'intégration, mais puisqu'il s'agit également d'une intégration, on peut intervertir l'ordre d'intégration et écrire

$$\begin{aligned}
\Phi(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} E[x_\lambda(t_1) x_\lambda(t_2)] e^{-i\omega(t_2-t_1)} dt_1 dt_2 \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} R_{XX}(t_2 - t_1) e^{-i\omega(t_2-t_1)} dt_1 dt_2
\end{aligned}$$

puisque par définition

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_2 - t_1) = E[x_\lambda(t_2) x_\lambda(t_1)]. \quad (4.73)$$

Faisant effectivement tendre T vers l'infini et en considérant $dsd\tau = 2dt_1 dt_2$ intégrés sur $2T$, $\tau = t_2 - t_1$, $s = t_2 + t_1$, on observe

$$\begin{aligned}
\Phi(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} R_{XX}(t_2 - t_1) e^{-i\omega(t_2-t_1)} dt_1 dt_2 \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi T} \int_{-T}^T ds \int_{-T}^T d\tau R_{XX}(\tau) e^{-i\omega\tau} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(R_{XX})(\omega),
\end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème. Remarquons aussi que $\Phi(\omega)$ est une fonction réelle et paire.

4.7 Corrélation de transformées en ondelettes et la coïncidence

4.7.1 Introduction

La majeure motivation et l'objectif de ce travail est d'appliquer l'analyse en ondelettes corrélées pour étudier et développer une nouvelle technique de diagnostic des temps d'arrivée des ondes de volume à partir des données sismiques.

L'analyse des séries temporelles est une question fondamentale en climatologie comme dans beaucoup d'autres champs de la recherche empirique. La méthode classique pour explorer de telles données par la décomposition fréquentielle est l'analyse de Fourier. Comme ces signaux sont souvent non-stationnaires, le problème de résolution temporelle devient nécessaire. La solution directe est l'utilisation de la transformée de Fourier à fenêtre. Le désavantage de cette méthode est que la largeur de la fenêtre reste constante pour toutes les fréquences visitées. Alors ici, l'analyse par la transformée en ondelettes a montré sa puissance. La résolution temporelle est intrinsèquement liée aux échelles. Un autre avantage de l'analyse en ondelettes est le choix flexible de l'ondelette mère selon les caractéristiques des séries temporelles en présence et ici on utilisera la transformée en ondelettes continue. Un important champ dans l'analyse des séries temporelles, spécialement en climatologie, est l'analyse multivariée. Quand on compare deux variables différentes comme la température ou la pression, on a besoin forcément d'une extension bivariée de l'analyse en ondelettes. Cette analyse en ondelettes croisée qui a été introduite par Hudgins [35] et d'autres, est brièvement discutée par Torrence et Compo [45, 62]. Elle a été appliquée aux problèmes variés en climatologie comme le système ENSO-Monsoon, ENSO-North Atlantic Oscillation(NAO), téléconnections [33] ou l'influence du NAO sur les températures européennes de surface [56].

Cependant, des questions importantes concernant cette technique restent ouvertes. On s'investira plus en examinant le spectre de puissance ainsi que le spectre croisé de la transformée en ondelettes.

4.7.2 Spectre de puissance de la transformée en ondelettes

Transférant le concept de l'analyse de Fourier, le spectre de puissance de la transformée en ondelettes **WPS** peut être défini comme la

transformée en ondelettes d'une fonction d'autocorrélation. En analogie avec le théorème de Wiener-Khintchine, cette transformée peut être implémentée comme suit :

$$\begin{aligned} WPS(a) &= \int \overline{(W_\psi s)(b, a)} (W_\psi s)(b, a) db \\ &= \int |(W_\psi s)(b, a)|^2 db. \end{aligned}$$

Le spectre de puissance de la transformée en ondelettes décrit la puissance du signal $s(t)$ au moment t avec l'échelle a .

4.7.3 Analyse croisée de la transformée en ondelettes

Comme dans l'analyse de Fourier, le spectre de puissance de la transformée en ondelettes peut être étendu pour comparer deux séries temporelles $u(t)$ et $v(t)$: on peut définir le spectre croisé de la transformée en ondelettes **WCS** comme le produit des transformées en ondelettes $(W_\psi u)(b, a)$ et $(W_\psi v)(b, a)$:

$$WCS(a) = \int \overline{(W_\psi v)(b, a)} (W_\psi u)(b, a) db. \quad (4.74)$$

Comme le spectre croisé de la transformée en ondelettes est à valeurs complexes, il peut être décomposé en amplitude $|WCS(b, a)|$ et phase $\Phi(b, a)$:

$$WCS(a) = |WCS(a)| \exp(i\Phi(a)). \quad (4.75)$$

La phase $\Phi(b, a)$ décrit le temps de retard entre les deux signaux au temps t à l'échelle a [25, 27, 45, 46, 50].

4.7.4 La coïncidence

Etant donné le signal $s_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, enregistré sur les capteurs (stations), nous cherchons en premier lieu leurs spectres de puissance respectifs WPS_1, WPS_2, WPS_3 . A partir de ces spectres de puissance, nous pouvons obtenir les lignes de maxima locaux qui dans notre cas sont des arêtes verticales correspondant aux temps d'arrivée des ondes sismiques. Nous considérons alors une fenêtre de 2 s et toutes les arêtes qui se retrouvent à l'intérieur, elles vont constituer un événement sismique ou pas entre les stations considérées.

Chapitre 5

Identification des séismes locaux dans les enregistrements continus des stations du réseau sismique belge

Depuis quelques années, les données continues de certaines stations sismiques belges sont archivées à l'ORB. C'est également le cas pour les enregistrements des stations mobiles implantées (voir Figure 5.4) dans le Brabant Wallon en juillet-août 2008 pour étudier la séquence sismique qui a débuté le 12 juillet 2008. On a pu constater que ces stations enregistraient de nombreux séismes non perçus par les stations du réseau permanent. Pour identifier ces petits événements locaux et mesurer les temps d'arrivée des différentes ondes, la relecture des données de ces stations doit se faire par fichier de 2 min et est donc fastidieuse. Pour cette raison, nous avons décidé de tester la méthode des ondelettes pour identifier les événements locaux de manière automatique et obtenir une mesure du temps d'arrivée des ondes P et S .

5.1 Réseau sismique belge et activité sismique en Belgique

Pendant longtemps, la station d'Uccle, fondée en 1899, a été la seule station sismique en Belgique. Le réseau lui-même dont, le but est d'enregistrer en permanence l'activité sismique s'est développé par étapes à partir de 1958. En 1983, le réseau sismique belge était limité aux quatre stations d'**Uccle**, **Dourbes**, **Walferdange** et **Membach**. Les signaux y étaient enregistrés uniquement sur papier et il n'existait aucune liaison de télémétrie permettant de transmettre les mesures à Uccle. Les effets du séisme du 8 novembre 1983 à Liège -73.500.000 EUR de dégâts pour un séisme pourtant modéré de magnitude locale $M_L = 5.0$, ont fait accepter la nécessité de moderniser et développer le réseau sismique belge [1, 2, 47, 64].

Le réseau actuel est composé de deux parties : le réseau sismométrique composé de 24 stations, dont 2 aux Pays-Bas et 2 au Grand-Duché de Luxembourg, et le réseau accélérométrique comprenant 19 stations (Figure 5.1). Les sismomètres enregistrent en permanence et ont une sensibilité telle qu'ils peuvent détecter les vibrations du sol les plus faibles, même lorsqu'elles émergent à peine du niveau de bruit. Les accéléromètres, en revanche, ne sont activés que lorsque les mouvements du sol les plus forts se produisent (Figure 5.2).

Le but principal du réseau sismométrique est de collecter des informations fiables sur l'activité sismique en Belgique et dans les régions limitrophes. Il permet, en outre, d'enregistrer les ondes sismiques provenant de séismes se produisant dans le monde entier. Le temps d'arrivée de ces ondes est mesuré et transmis aux centres internationaux.

Les accéléromètres quant à eux, moins sensibles que les sismomètres, sont conçus pour mesurer les accélérations fortes du sol, même jusqu'à 1 g, donc y compris à proximité de l'épicentre lors des séismes importants. De nos jours, l'activité sismique en Belgique est loin d'être négligeable. Suite au tremblement de terre de **Liège**, un réseau de surveillance sismique a été implanté progressivement dès 1985. Depuis cette date, 1106 événements ont été enregistrés, détectés et localisés (Figure 5.3) dont 40 de magnitude supérieure à 3.0 sur l'échelle de Richter.

La carte de la Figure 5.3 montre les tremblements de terre en Belgique et dans les régions voisines depuis 1985.

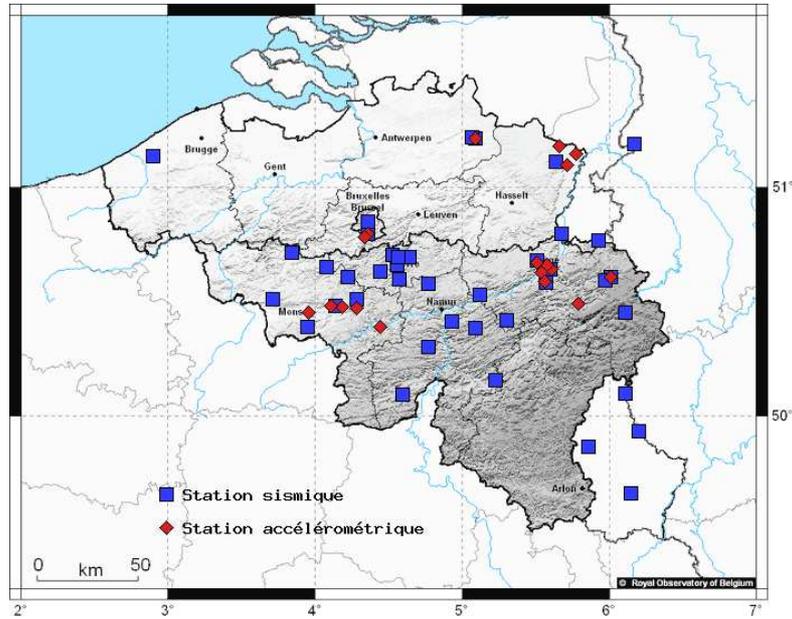


FIGURE 5.1 – Carte du réseau sismique belge en septembre 2009

L'activité sismique se concentre dans certaines zones :

- **La frontière entre la Belgique, les Pays-Bas et l'Allemagne.** Les tremblements de terre de **Roermond en 1992** et **Als-dorf en 2002** se situent dans cette zone ;
- La région de **Liège (1983)** et les Hautes Fagnes ;
- Le **bassin de Mons** ;
- Le **massif du Brabant** qui s'étend jusqu'à la **mer du Nord**. Le tremblement de terre de **Le Roeulx en 1995** se rapporte aussi à cette zone.

Date	Temps	M_L	M_S
06-01-1953	23:58:44	4.0	3.4
28-08-1953	00:05:21	3.6	
28-08-1953	00:06:16	3.4	
21-04-1956	22:47:07		

TABLE 5.1 – Tremblements de terre importants connus en Belgique



FIGURE 5.2 – Pilier avec le sismomètre et l'accéléromètre à la station de La Chartreuse (LCH) à Liège

Un tremblement de terre est caractérisé par les paramètres au foyer qui sont la date et heure d'origine, coordonnées de l'épicentre, profondeur de l'hypocentre, qui est le point à l'intérieur de la Terre où s'initie la rupture, sa magnitude qui fournit une information sur les dimensions de la zone de faille affectée par l'événement, la période ainsi que sa région. Les mesures par le réseau sismométrique belge, donnant les temps d'arrivée des ondes P et ondes S , peuvent être également consultées sur le même site sous la rubrique "**Banques de données en ligne**".

5.2 Les données analysées dans ce travail

Pour étudier les caractéristiques des signaux proposées par ces séismes, on a analysé en premier lieu 2 familles de données sismiques.

Pour établir les caractéristiques des ondelettes à utiliser pour réaliser ces objectifs, nous avons étudié les séismes du 12-08-2008 à 13:38 et du 23-08-2008 à 00:16 enregistrés sur 4 des stations mobiles avec les 3 composantes à savoir :

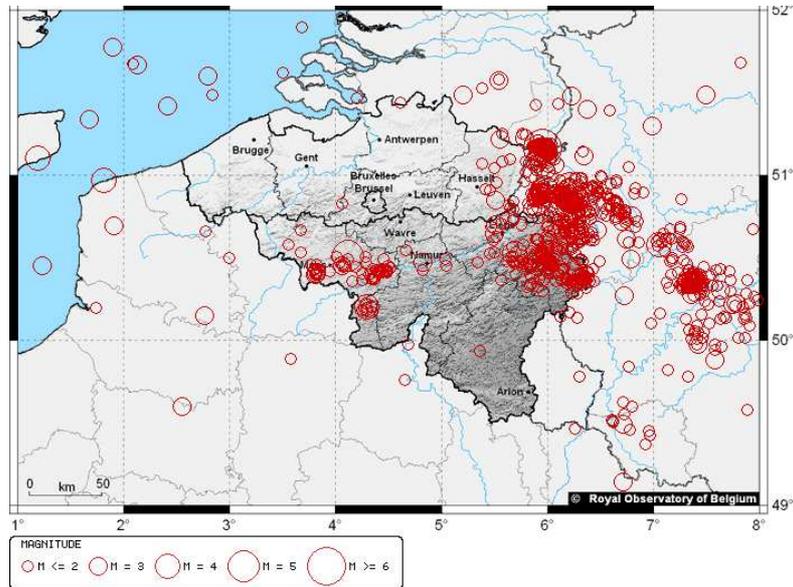


FIGURE 5.3 – Activité sismique 1985–2007

1. Stations

- Ottignies (**OTT**),
- Limal (**OT4**),
- Genappe (**OT5**),
- Grand-Leez (**GRZ**).

2. Composantes

- East (**e**),
- North (**n**),
- Vertical (**v**).

Pour le premier séisme étudié, les paramètres au foyer sont :

1. Événement du 12–08–2008 à 13:39:49.39 T.U.

- Coordonnées de l'épicentre : Latitude 50.621° N,
Longitude 4.575° E, Incertitude : ± 0.8 Km
- Profondeur de l'hypocentre : 6.5 Km, Incertitude : ± 1.0 Km
- Magnitude locale : M_L 1.2

2. Événement du 23–08–2008 à 00:16:51.84 T.U.

- Coordonnées de l'épicentre : Latitude 50.624° N,
Longitude 4.583° E, Incertitude : ± 0.7 Km

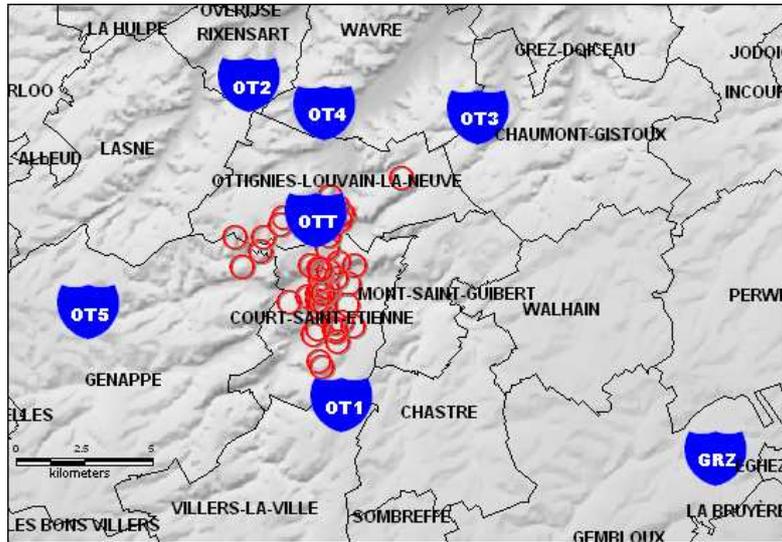


FIGURE 5.4 – Réseau de mesure temporaire déployé en Brabant Wallon

- Profondeur de l’hypocentre : 6.7 Km, Incertitude : ± 0.9 Km
- Magnitude locale : M_L 0.7

Les enregistrements sur les stations **OTT**, **OT4**, **OT5** ont une période d’échantillonnage de 0.008 s et ont duré 20 secondes, tandis que sur **GRZ**, on a une période d’échantillonnage de 0.002 s avec une durée de 15 secondes.

Nous avons testé la détection automatique en considérant l’enregistrement de 2 h fait le 03-03-2009 de 3 à 5 h. Durant cette période, 8 tremblements de terre ont été identifiés visuellement avec une période d’échantillonnage de 0.004 s par les sismologues aux stations de **OTT**, **OT5** et **GRZ**.

Les caractéristiques de ces tremblements de terre sont les suivantes :

1. Événement du 03-03-2009 à 03:23:32.64 T.U.

- Coordonnées de l’épicentre : Latitude 50.633° N, Longitude 4.583° O, Incertitude : ± 0.5 Km
- Profondeur de l’hypocentre : 6.6 Km, Incertitude : ± 0.6 Km
- Magnitude locale : M_L 2.9

2. Événement du 03-03-2009 à 03:23:50.22 T.U.

- Coordonnées de l'épicentre : Latitude 50.623° N,
Longitude 4.582° O, Incertitude : ± 0.7 Km
- Profondeur de l'hypocentre : 6.8 Km, Incertitude : ± 1.1 Km
- Magnitude locale : M_L 2.3

3. Événement du 03-03-2009 à 03:26:11.60 T.U.

- Coordonnées de l'épicentre : Latitude 50.623° N,
Longitude 4.580° O, Incertitude : ± 0.7 Km
- Profondeur de l'hypocentre : 6.7 Km, Incertitude : ± 1.1 Km
- Magnitude locale : M_L 1.0

4. Événement du 03-03-2009 à 03:27:23.19 T.U.

- Coordonnées de l'épicentre : Latitude 50.622° N,
Longitude 4.576° O, Incertitude : ± 0.7 Km
- Profondeur de l'hypocentre : 6.8 Km, Incertitude : ± 1.0 Km
- Magnitude locale : M_L 1.0

5. Événement du 03-03-2009 à 03:57:08.24 T.U.

- Coordonnées de l'épicentre : Latitude 50.626° N,
Longitude 4.565° O, Incertitude : ± 0.9 Km
- Profondeur de l'hypocentre : 6.0 Km, Incertitude : ± 1.4 Km
- Magnitude locale : M_L 0.1

6. Événement du 03–03–2009 à 04:11:27.00 T.U.

- Coordonnées de l'épicentre : Latitude 50.645° N,
Longitude 4.563° O, Incertitude : ± 1.0 Km
- Profondeur de l'hypocentre : 5.0 Km, Incertitude : ± 1.0 Km
- Magnitude locale : M_L 0.2

7. Événement du 03–03–2009 à 04:29:56.74 T.U.

- Coordonnées de l'épicentre : Latitude 50.627° N,
Longitude 4.566° O, Incertitude : ± 0.6 Km
- Profondeur de l'hypocentre : 6.1 Km, Incertitude : ± 0.9 Km
- Magnitude locale : M_L 1.1

8. Événement du 03–03–2009 à 04:33:57.78 T.U.

- Coordonnées de l'épicentre : Latitude 50.620° N,
Longitude 4.575° O, Incertitude : ± 0.7 Km
- Profondeur de l'hypocentre : 6.5 Km, Incertitude : ± 1.0 Km
- Magnitude locale : M_L 1.1

5.3 La mesure des temps d'arrivée par ondelettes

5.3.1 Introduction

Dans cette section, on entrera vers les applications des ondelettes en sismique et on verra comment les ondelettes sont un outil performant et puissant dans le domaine de l'analyse des données sismiques en ce qui concerne les temps d'arrivée des ondes de volume et donnent une nouvelle approche d'analyse temps-échelle. On utilisera la toolbox de l'unité Fyma qu'on peut trouver sur le site [21].

Dans un premier lieu, on va rappeler les méthodes traditionnelles et ceci dans le but de justifier l'intérêt de l'analyse des temps d'arrivée proposée dans ce travail. On terminera en proposant une nouvelle méthode basée sur le concept d'ondelettes pour l'estimation de ces temps d'arrivée et on étudiera la corrélation au sein de chaque station, la corrélation entre différentes stations ainsi que les coïncidences pour détecter automatiquement les événements sismiques [25, 66].

5.3.2 Méthodes existantes

En géophysique, le traitement et l'interprétation des signaux et des images issus d'une propagation effectuée dans un milieu terrestre ou

marin constituent une plate-forme de mise en place d'essais, des analyses et des techniques de traitement du signal.

A ce titre, une des activités journalières des sismologues reste, entre autres, la mesure des temps d'arrivée des différents types d'ondes sismiques. La mesure exacte permet en effet de déterminer avec précision les foyers des séismes et par conséquent de donner la configuration des zones dont les activités sismiques sont intenses [5, 17]. L'amélioration des méthodes permettant d'avoir des mesures précises ne manque pas donc d'intérêt. Les méthodes, aussi bien théoriques que numériques, utilisées en sismologie sont traditionnelles dans ce sens qu'elles sont basées sur la transformée de Fourier.

Bien que celle-ci permette d'avoir des mesures approximatives dont l'erreur n'est pas significative (de l'ordre de quelques centièmes de secondes), elle n'est pas toujours adéquate pour l'étude de certains types de signaux, comme par exemple les signaux où coexistent des événements d'échelles très différentes. Une des méthodes utilisées jusqu'ici est visuelle. Elle consiste à relever directement et visuellement la mesure sur les sismogrammes dans une station sismologique donnée. Il existe aussi des méthodes automatiques qui permettent de fournir les temps d'arrivée, mais ces derniers s'avèrent moins précis que ceux qui sont relevés visuellement [38, 60, 65].

5.3.3 Position du problème et choix de l'analyse temps-échelle

La première tâche dans ce travail est l'amélioration des méthodes permettant d'obtenir des mesures exactes des temps d'arrivée d'ondes de volume. Une telle tâche, dans ce cas, repose sur l'analyse par ondelettes.

Généralement, un signal sismique peut être "scindé" en deux parties :

- une partie "*signal pertinent*" utile à l'interprétation ;
- une partie inutile, à savoir le "*bruit*".

Traditionnellement, en traitement du signal, on dispose des méthodes linéaires : on peut par exemple filtrer la transformée de Fourier pour enlever les fréquences parasites. Ce genre de méthodes fait cependant apparaître des oscillations indésirables dues au phénomène de *Gibbs*. Un secteur de recherche actuel est l'utilisation des ondelettes adaptées pour des phénomènes non linéaires.

Pour cette raison, on va s'intéresser en particulier à l'analyse de ces ondes et on verra que grâce à l'usage d'une représentation temps-échelle et en particulier la corrélation de la transformée, on peut faire

une estimation plus adaptée pour la mesure exacte. Nous avons testé la performance de cette approche *corrélation-ondelettes* sur les données sismiques du Brabant Wallon.

On avait vu dans le chapitre précédent trois types de transformées. Le choix de telle ou telle autre représentation n'est pas aisé et dépend beaucoup des situations étudiées.

Y.Meyer a écrit : “*En exagérant à peine, nous introduirons presque autant d’algorithmes d’analyse qu’il y a de signaux...*”. Cependant, il faut admettre qu’il n’y a pas de méthode “miracle”, ni de technique infaillible dans le domaine de l’analyse des signaux sismiques [13, 49].

5.3.4 Estimation des temps d’arrivée et comparaison avec les mesures visuelles

Méthodologie de travail

Classiquement, les techniques de calcul de temps d’arrivée des ondes sismiques sont basées sur la lecture visuelle sur les sismogrammes et la différence entre les temps mesurés par l’ORB et les temps mesurés par notre méthode se lit sur la corrélation croisée au sein d’une station. Il existe des méthodes qui permettent de mesurer automatiquement les temps d’arrivée, mais leur précision dépasse rarement celle de la mesure visuelle. La méthode qu’on va proposer pour l’estimation du temps d’arrivée est basée, quant à elle, sur le concept de la transformée continue en ondelettes. On montre que, par une modélisation du signal sismique, un choix d’une ondelette d’analyse et d’un facteur d’échelle adaptés, il sera possible de déterminer le temps d’arrivée des ondes de volume. On se focalisera sur le spectre de puissance ainsi que sur le spectre croisé de la transformée en ondelettes et on comparera les résultats obtenus à ceux de l’Observatoire Royal de Belgique.

Soit $s(t)$ le signal sismique (onde émise d’une source d’ébranlement), on a vu aussi dans le deuxième chapitre qu’une modélisation d’un signal sismique $f(t)$, reçu par un capteur (station) donné, peut s’écrire comme suit :

$$f(t) = \sum_{k=1}^N a_k \delta(t - \tau_k) \exp(i\varphi_k) * s_k(t) + b_k(t), \quad (5.1)$$

avec τ_k et φ_k respectivement le retard en temps et le déphasage de la $k^{\text{ième}}$ onde sur le capteur, a_k représente le gain en amplitude et b_k le bruit additif. Pour simplifier, on considère le cas d’une seule onde reçue sur deux et plusieurs capteurs différents.

Notons par $x(t)$ et $y(t)$ respectivement le signal présentant des discontinuités reçu sur le premier capteur et le même signal reçu sur le deuxième capteur retardé par rapport au premier :

$$x(t) = s(t) + b_x(t) \quad (5.2)$$

$$y(t) = s(t - \tau) + b_y(t) \quad (5.3)$$

où

– $s(t)$ représente le signal de référence défini par :

$$s(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_0, \\ (t - t_0)^\alpha, & t > t_0; \end{cases}$$

– $s(t - \tau)$ représente le même signal retardé de τ ;

– $b_x(t), b_y(t)$ représentent deux sources de bruits supposés de haute fréquence.

5.3.5 Mise en oeuvre de la transformée en ondelettes

Supposons que le signal de référence $s(t)$ soit réel, symétrique et à support compact. Les bruits b_x et b_y sont supposés de haute fréquence, ce qui se traduit par le fait qu'il existe $\xi_0 > 0$, tel que pour tout ξ , $|\xi| < \xi_0$,

$$\widehat{b}_x(\xi) = \widehat{b}_y(\xi) = 0. \quad (5.4)$$

Soit une ondelette analysante ψ supposée à support compact dans le domaine de Fourier, c'est-à-dire :

$$\exists \xi_1 > \xi_2 > 0 \text{ tels que } \widehat{\psi}(\xi) = 0 \text{ pour } |\xi| \notin [\xi_1, \xi_2]. \quad (5.5)$$

On suppose de plus que ψ est à décroissance rapide :

$$\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \exists C > 0, \text{ tel que, } \psi(t) < \frac{\varepsilon}{t^2}, \quad (5.6)$$

pour tout $t \notin [-C, C]$.

Proposition 5.1 *Sous les hypothèses (5.4), (5.5), (5.6) et pour un facteur d'échelle a tel que :*

$$\frac{\xi_2}{\xi_0} \leq a \leq \frac{T}{C}, \quad (5.7)$$

on a :

$$(W_\psi y)(b, a) = (W_\psi s)(b - \tau, a) \quad (5.8)$$

Preuve

La transformée en ondelettes définie dans le domaine de Fourier donne :

$$\begin{aligned} (W_\psi s)(b, a) &= S(b, a) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) s(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i \xi t) \overline{\widehat{\psi}(a\xi)} \widehat{s}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Alors la transformée en ondelettes de $y(t)$ donne :

$$\begin{aligned} (W_\psi y)(b, a) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi(b-\tau)) \overline{\widehat{\psi}(a\xi)} \widehat{s}(\xi) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi b) \overline{\widehat{\psi}(a\xi)} \widehat{b}_y(\xi) d\xi \right]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Or, le bruit est supposé de haute fréquence, donc $\overline{\widehat{\psi}(a\xi)} \widehat{b}_y(\xi) = 0$, pour $|\xi| < \xi_0$. Pour le choix du facteur d'échelle a tel que $a \geq \frac{\xi_2}{\xi_0}$ et, comme $\widehat{\psi}$ est à support compact, on peut écrire :

$$\overline{\widehat{\psi}(a\xi)} \widehat{b}_y(\xi) = 0, \forall \xi \in \mathbb{C}. \quad (5.10)$$

Par conséquent, le bruit ne participe plus à la transformée en ondelettes de la trace y et on obtient :

$$(W_\psi y)(b, a) = (W_\psi s)(b - \tau, a). \quad (5.11)$$

Le spectre de puissance de la transformée de Fourier d'une fonction s est donné par :

$$E_s(\xi) = |\widehat{s}(\xi)|^2, \quad (5.12)$$

et ceci est la norme de la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation $s(t)$, en vertu du théorème de Wiener-Khinchine. La question qui nous vient en tête est de savoir ce qui se passe lors du croisement.

La réponse devient la recherche du spectre croisé de Fourier, qui est l'estimation de la covariance entre deux fonctions s_1 et s_2 et est donnée par :

$$C_{s_1 s_2}(\xi) = \left| \overline{\widehat{s}_1(\xi)} \widehat{s}_2(\xi) \right|. \quad (5.13)$$

Avec cette notation, on aura que $E_s(\xi) = C_{ss}(\xi)$.

De la même manière, on peut écrire le spectre de puissance de la transformée en ondelettes d'une fonction s pour une échelle donnée a comme suit [40, 41, 55] :

$$WPS(a) = \int |(W_{\psi}s)(b, a)|^2 db. \quad (5.14)$$

Et le spectre de puissance croisée de la transformée en ondelettes donne :

$$WCS(a) = \int \overline{(W_{\psi}s_1)(b, a)} (W_{\psi}s_2)(b, a) db. \quad (5.15)$$

5.3.6 La mesure des temps d'arrivée et caractéristiques de l'ondelette

Dans cette section, on exploitera le spectre de puissance de la transformée en ondelettes ainsi que le spectre croisé au sein d'une station. Pour ce qui est des données sismiques utilisées pour déterminer les temps d'arrivée des ondes de volume, on les a d'abord centrées c'est-à-dire $s_{ii} = s_i - \text{mean } s_i$, où $\text{mean } s_i$ n'est autre que la moyenne du signal s_i , et on a utilisé l'ondelette de *Morlet* avec les termes correctifs (voir Figure 5.5) pour que condition d'admissibilité (4.9) soit remplie et nous avons procédé de cette manière :

- En premier lieu, nous avons calculé les coefficients de la transformée en ondelettes pour le signal sismique s_i avec $i = 1, 2, 3$ représentant les différentes composantes qui sont la composante East, la composante North et la composante Vertical :

$$W_{\psi}s_i(b, a) = \langle \psi_{b,a} | s_i \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} s(t) dt. \quad (5.16)$$

- En deuxième lieu, nous avons cherché les coefficients d'ondelettes du spectre de puissance de la transformée en ondelettes en utilisant la transformée en ondelettes déjà trouvée,

$$WPS(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{W_{\psi}s_i(b, a)} W_{\psi}s_i(b, a) db. \quad (5.17)$$

- En troisième lieu, nous avons calculé les coefficients d'ondelettes du spectre croisé de la transformée en ondelettes,

$$WCS(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{W_{\psi}s_i(b, a)} W_{\psi}s_j(b, a) db, \quad (5.18)$$

avec $i \neq j$ et $j = 1, 2, 3$.

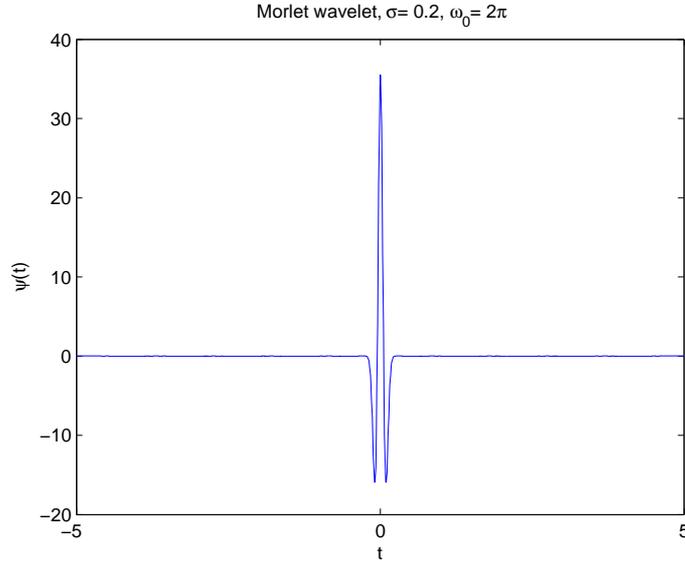


FIGURE 5.5 – Partie réelle de l’ondelette de Morlet avec termes correctifs pour $\sigma = 0.2$

- En dernier lieu, nous avons utilisé les Maxima locaux du module de la transformée en ondelettes de cette façon pour a_k fixé :

$$|WT(a_k, l - 1)| < |WT(a_k, l)|, \quad (5.19)$$

et

$$|WT(a_k, l + 1)| < |WT(a_k, l)|, \quad (5.20)$$

prendre $|WT(a_k, l)|$ comme le maxima local. Et la WT est la transformée en ondelettes de tous les cas utilisés plus haut et k est l’indice de l’échelle tandis que l est l’indice temporel.

L’ondelette de **Morlet** utilisée avec les termes correctifs est le suivant :

$$\psi_{Mcorr}(t) = \pi^{-1/4} \left(e^{(i\omega_0 t)} - e^{\left(\frac{-\sigma_0^2 \omega_0^2}{2}\right)} \right) e^{\left(\frac{-t^2}{2-\sigma_0^2}\right)} \quad (5.21)$$

$$\hat{\psi}_{Mcorr}(\omega) = \pi^{-1/4} e^{\left(\frac{-[(\omega-\omega_0)\sigma_0]^2}{2}\right)} - e^{\left(\frac{-\sigma_0^2(\omega^2+\omega_0^2)}{2}\right)} \quad (5.22)$$

La largeur de la fenêtre est $\sigma_0 = 0.2$ et la fréquence est $\omega_0 = 2\pi$.

Les intervalles **temporel** et **fréquentiel** sont les suivants :

- Intervalle temporel : $[t_0 = 0 \text{ s}, t_N = 15 \text{ ou } 20 \text{ s}]$ pour les séismes du 12-08-2008 et du 23-08-2008.
- Intervalle temporel : $[t_0 = 0 \text{ s}, t_N = 200 \text{ s}]$ pour l'enregistrement de 2 h de temps.
- Intervalle fréquentiel : $[f_J = 15 \text{ Hz}, f_0 = 45 \text{ Hz}]$.

Pour une bonne résolution, on a choisi les octaves et les voix de la manière suivante,

$$\text{noctave} = \text{ceil}(\log_2(f_0/f_J)) \quad (5.23)$$

$$\text{nvoice} = 40, \quad (5.24)$$

où la fonction *ceil* permet d'avoir la valeur entière supérieure. En posant $dj = 1/\text{nvoice}$ et $J1 = \text{nvoice} * \text{noctave}$, on a défini la connexion échelle-fréquence comme suit,

$$\text{scales} = s_0 * 2^\alpha \quad (5.25)$$

où $s_0 = \omega_0 / (2\pi f_0)$ et $\alpha = (J1 * dj)$. Pour ce qui est des arêtes verticales qui vont nous donner le temps d'arrivée, on a pris la matrice des coefficients d'ondelettes des maxima locaux. Ainsi ces lignes verticales de maxima locaux constituant le squelette ne correspondent pas toutes aux points dominants de la CWT mais aussi au bruit et autres caractéristiques importantes du signal origine. Alors ces points dominants sont détectés à partir des lignes verticales de maxima locaux mais chaque ligne n'est pas nécessairement la signature du point dominant. L'idée générale est d'alors identifier parmi ces lignes celles qui sont pertinentes, autrement dit, qui sont réellement des événements. Pour y arriver, on a défini *deux critères*.

Se référant à [9], on s'est penché sur la détection des arêtes dominantes à partir de notre transformée en ondelettes. En effet, on s'est pris de de la manière suivante :

- Détecter toutes les arêtes verticales L_{v_i} et chaque arête verticale correspond au temps d'arrivée t_i des ondes de volume,
- Calculer la mesure pertinente $f(L_{v_i})$ correspondant à la longueur de l'arête L_{v_i} ;
- Si $f(L_{v_i}) > T$, où T est la valeur du seuil, et l'arête verticale L_{v_i} tend vers b_0 lorsque a_0 décroît, prendre L_{v_i} comme arête verticale dominante.

En supposant que la longueur de l'arête L_{v_i} baptisée l_{v_i} qui couvre totalement l'intervalle fréquentiel (échelle) soit de longueur *unité*, on a pris

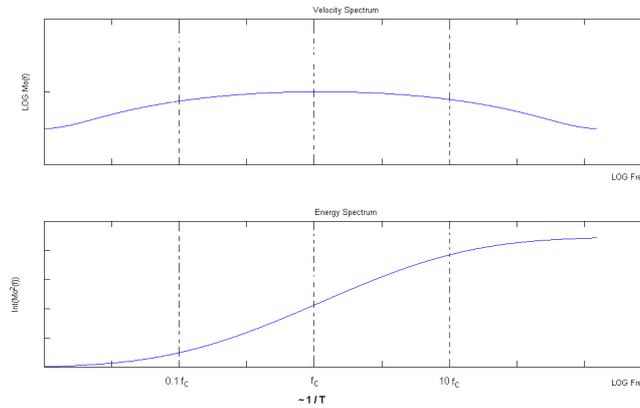


FIGURE 5.6 – Spectres de vitesse et d'énergie

seulement en compte les arêtes dont la longueur $l_{v_i} > 0.8$, les autres étant assimilées au bruit, c'est-à-dire $T = 0.8$ et c'est une première approche.

La deuxième approche est liée à la physique des séismes analysés. Nous partons de ce qu'on appelle "fréquence coin", déterminée par $f_c \sim \frac{v_r}{L}$ où v_r est la vitesse de rupture et L est la longueur de faille. Ces séismes du Brabant wallon ont une bande de fréquence large, de $0.1f_c \rightarrow 10f_c$, et également un spectre de vitesse étendu, ce qui permet de faire une connexion directe avec la longueur de la bande passante et par conséquent la longueur des arêtes verticales qui doit être grande (voir Figure 5.6). En deuxième lieu, nous avons utilisé l'écart temporel, c'est-à-dire en ne regroupant que les arêtes dont l'intervalle est estimé à $20 * dt$ avec dt comme période d'échantillonnage du signal sismique. Ainsi, on a regroupé les arêtes en familles comme suit :

1. Trouver toutes les arêtes L_{v_i}

Nous avons trouvé toutes les arêtes verticales L_{v_i} dont la longueur $l_{v_i} \geq T$, ainsi nous aurons $L_{v_i} := t_i$ c'est-à-dire l'arête L_{v_i} reçoit la valeur t_i correspondant à l'arrivée de l'onde de volume,

2. Grouper les arêtes proches en utilisant trois critères

- la première arête significative du groupe : $L_{v_1} := t_1$, c'est-à-dire en prenant l'intervalle de $20 * dt$, nous prenons à l'intérieur la première arête significative, autrement dit, celle qui a la plus grande longueur ;

- **la moyenne simple** des arêtes Comme nous pouvons avoir plusieurs arêtes remplissant la condition de longueur qui est $T = 0.8$, nous prenons la moyenne arithmétique des arêtes dans notre intervalle, c'est-à-dire

$$L_{v_{2j}} := t_2 = \frac{\sum_{i=1}^{M_j} L_{v_i}}{M_j}; \quad (5.26)$$

- **la moyenne pondérée** des arêtes :

$$L_{v_{3j}} := t_3 = \frac{\sum_{i=1}^{M_j} L_{v_i} l_{v_i}}{\sum_{i=1}^{M_j} l_{v_i}}, \quad (5.27)$$

avec $j = 1, \dots, N_g$, où N_g est le nombre de groupes d'arêtes et M_j est le nombre d'arêtes au sein du groupe considéré . Pour l'enregistrement du 03-03-2009, on a été obligé de travailler sur les intervalles temporels de 200 secondes, vu la capacité mémoire de la machine utilisée.

On a également introduit les erreurs moyennes quadratiques Err_t des temps d'arrivée des ondes de volume par :

$$Err_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t}_i)^2}{n}}, \quad (5.28)$$

avec :

- t_i : valeur réelle du temps d'arrivée (ORB)
- \bar{t}_i : valeur approchée du temps d'arrivée
- n : nombre de mesures

Ce critère de qualité sera utilisé pour juger la qualité et la performance de la méthode.

5.4 Analyse des temps d'arrivée des ondes P et S

L'analyse des temps d'arrivée des ondes de volume a été faite sur trois stations à savoir Ottignies, Genappe et Grand-Leez pour le séisme du 12-08-2008 et l'enregistrement continu du 03-03-2009 tandis que pour le séisme du 23-08-2009, il a été analysé sur quatre stations Ottignies, Limal, Genappe et Grand-Leez.

1. Spectre de puissance de la TO

Analyse du séisme du 12-08-2008

Pour **Ottignies**, on voit beaucoup plus facilement l'arrivée des ondes secondaires et les ondes primaires sont faiblement détectées. Ces arrivées sont détectées sur les composantes East et North en utilisant le spectre de puissance de la TO. Ainsi pour la composante East, l'arrivée est à 13:39:51.6789, 13:39:51.69 sur la composante North et sur la composante Vertical à 13:39:51.6102. L'hypothèse qu'on pourrait émettre sur la non détection de l'onde primaire est que cette onde ne s'est pas dirigée sur le capteur (voir Figure 5.7).

Pour **Genappe**, on détecte les ondes primaire et secondaire. Ainsi pour la composante East, l'arrivée de l'onde secondaire est à 13:39:52.69 et l'onde primaire n'est pas détectée. Sur la composante North, on détecte l'arrivée de l'onde primaire à 13:39:51.58 et l'onde secondaire à 13:39:52.67 et sur la composante Vertical on détecte l'onde primaire à 13:39:51.46 et l'onde secondaire à 13:39:52.61.

Pour **Grand-Leez**, on détecte seulement l'arrivée des ondes secondaires sur les composantes East et Vertical. Sur la composante East on a l'arrivée de l'onde secondaire à 13:39:53.826 et à 13:39:53.938 sur la composante Vertical et l'onde primaire est détectée à 13:39:52.1(voir Table 6.1 en annexe).

Analyse du séisme du 23-08-2008

Pour **Ottignies**, on voit plus l'arrivée des ondes secondaires. Ainsi sur la composante East l'onde secondaire est détectée à 00:16:54.22, sur la composante North à 00:16:54.30 et sur la composante Vertical à 00:16:54.22 et l'onde primaire est détectée à 00:16:53.27.

Pour **Limal**, on trouve plus l'arrivée des ondes secondaires. Ainsi pour la composante East l'onde secondaire arrive à 00:16:55.01, sur la

composante North elle arrive à 00:16:55.04 et sur la composante Vertical à 00:16:55.04 et l'onde primaire est détectée à 00:16:53.73.

Pour **Genappe**, on trouve l'arrivée des ondes primaire et secondaire. Ainsi sur la composante North l'arrivée de l'onde secondaire est à 00:16:55.55 et on ne trouve pas l'onde primaire. Sur la composante Vertical on détecte l'arrivée de l'onde primaire à 00:16:53.99 et l'onde secondaire arrive à 00:16:54.07.

Pour **Grand-Leez**, on trouve sur la composante North l'arrivée de l'onde secondaire à 00:16:56.262 et l'onde primaire n'est pas détectée. Sur la composante Vertical on détecte l'arrivée de l'onde primaire à 00:16:54.622 et l'onde secondaire arrive à 00:16:56.306 (voir Table 6.1 en annexe).

Analyse de l'enregistrement continu du 03-03-2009

L'analyse a été faite sur trois stations à savoir Ottignies, Genappe et Grand-Leez et sur un intervalle de 200 s vu la capacité mémoire de la machine utilisée.

Pour **Ottignies**, les temps d'arrivée des ondes de volume ont été obtenus, c'est-à-dire sur l'intervalle [1400, 1600] et la composante Vertical l'onde primaire arrive à 03:23:34.05 et l'onde secondaire à 03:23:34.834. A cause de la grande énergie des ondes précédentes on ne détecte pas l'arrivée de l'onde suivante. Pour pallier ce problème on s'est restreint à un petit intervalle de quatre secondes c'est-à-dire [1573, 1577] et on trouve l'arrivée de l'onde secondaire sur la composante East à 03:26:13.952. Sur l'intervalle [1600, 1800] et la composante East l'arrivée de l'onde secondaire est à 03:27:25.6. Pour l'intervalle [5200, 5400] et la composante Vertical on détecte l'arrivée de l'onde primaire à 04:29:58.086 et l'onde secondaire arrive à 04:29:59.03 tandis que sur la composante North on obtient l'arrivée de l'onde secondaire à 04:29:58.954. Pour l'intervalle [5600, 5800] et la composante Vertical on détecte les arrivées des ondes primaire à 04:33:59.264 et secondaire à 04:34:00.216 et sur la composante East on détecte seulement l'onde secondaire qui arrive à 04:34:00.071. La non détection de l'onde primaire est due probablement au fait qu'elle ne se dirige pas directement sur le matériel d'enregistrement.

Pour **Genappe**, on trouve sur l'intervalle [1400, 1600] et la composante Vertical l'arrivée de l'onde primaire à 03:23:34.650 et celle de l'onde secondaire à 03:23:36.008. A cause de la grande énergie de l'onde précédente on ne parvient pas à déterminer et l'onde qui suit immédiatement et pour pallier ce problème on se restreint sur un petit intervalle

[1432, 1435] de 3 s et la composante East et l'arrivée de l'onde primaire est à 03:23:52.316. Sur l'intervalle [1600, 1800] et la composante North on détecte l'arrivée de l'onde secondaire à 03:27:26.724. Sur l'intervalle [3429, 3432] et sur la composante East on trouve l'onde primaire qui arrive à 03:57:09.628 et sur la composante Vertical on trouve l'onde secondaire qui arrive à 03:57:11.824. Sur l'intervalle [5200, 5400] on détecte l'arrivée de l'onde primaire à 04:29:58.674 sur la composante Vertical et l'onde secondaire à 04:29:59.628 sur la composante North. Sur l'intervalle [5600, 5800] on détecte l'arrivée de l'onde primaire à 04:34:00.063 sur la composante Vertical et l'onde secondaire à 04:34:01.190 sur la composante East.

Pour **Grand-Leez** on a l'arrivée de l'onde primaire à 03:23:35.432 sur l'intervalle [1400, 1600] avec la composante Vertical et sur la composante East on détecte l'arrivée de l'onde secondaire à 03:23:37.14. A cause de l'énergie de ces ondes on ne parvient pas à détecter l'onde suivante et pour pallier ce problème on s'est restreint sur un petit intervalle [1433, 1437] et on détecte l'arrivée de l'onde secondaire à 03:23:54.6 sur la composante Vertical et l'onde primaire est détectée à 03:23:53.01. Sur l'intervalle [1600, 1800] on détecte l'arrivée de l'onde secondaire à 03:27:27.73 sur la composante North. Sur l'intervalle [5200, 5400] on détecte l'arrivée de l'onde primaire à 04:29:59.432 sur la composante Vertical et en prenant l'intervalle suivant c'est-à-dire [5400, 5600] on détecte cette fois-ci l'arrivée de l'onde secondaire à 04:30:01.12 sur la composante North. Concernant l'intervalle [5600, 5800] on détecte seulement l'arrivée de l'onde primaire à 04:34:00.596 sur la composante Vertical (voir Table 6.2 en annexe).

2. Spectre croisé de la TO

Analyse du séisme du 12-08-2008

Pour **Ottignies**, les temps d'arrivée obtenus sur le spectre de puissance sont confirmés par le spectre croisé c'est-à-dire qu'on ne détecte que les ondes secondaires. Ainsi sur les composantes East-North, le temps d'arrivée est 13:39:51.69 qui est le même sur les composantes North-Vertical et sur les composantes North-Vertical, le temps d'arrivée est 13:39:51.70. L'explication sur la non détection de l'onde primaire restant la même que précédemment (voir Figure 5.8).

Pour **Genappe**, on détecte l'arrivée des ondes primaire et secondaire sur certaines composantes. Ainsi sur les composantes East-North, l'onde

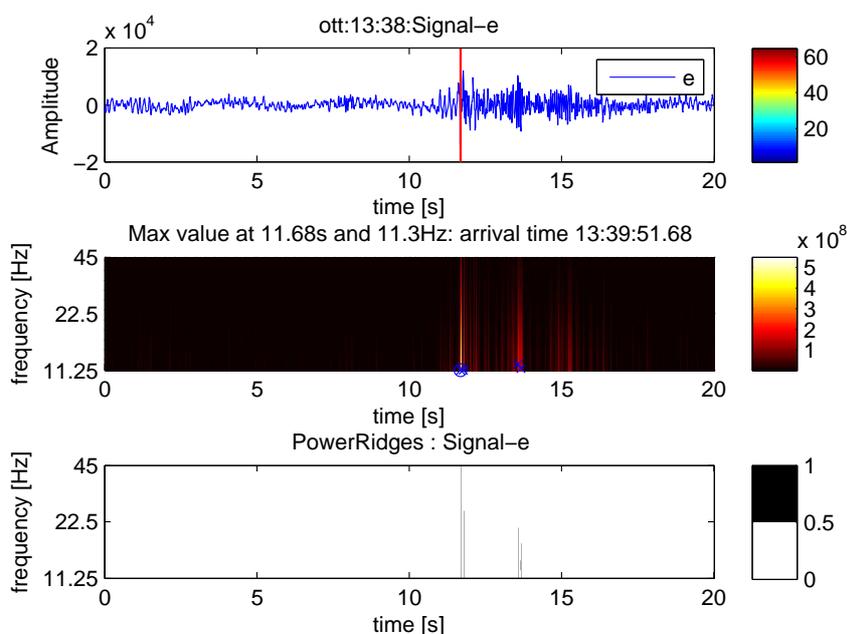


FIGURE 5.7 – Spectre de puissance de la TO : composante [East]-OTT-Séisme du 12-08-2008

secondaire arrive à 13:39:52.68 et l'onde primaire n'est pas détectée. Sur les composantes East-Vertical, on détecte l'onde primaire à 13:39:51.43 et l'onde secondaire à 13:39:52.69 tandis que sur les composantes North-Vertical l'arrivée de l'onde primaire est à 13:39:51.44 et l'onde secondaire arrive à 13:39:52.72.

Pour **Grand-Leez**, on ne trouve que l'arrivée de l'onde secondaire sur les composantes East-Vertical à 13:39:53.94 (voir Table 6.3 en annexe).

Analyse du séisme du 23-08-2008

Pour **Ottignies** avec le spectre croisé, on détecte l'arrivée des ondes primaire et secondaire. Ainsi sur les composantes East-North, East-Vertical et North-Vertical l'onde secondaire arrive respectivement au même instant c'est-à-dire à 00:16:54.22. Pour l'onde primaire, elle ar-

rive à 00:16:53.27 et à 00:16:53.35 respectivement sur les composantes East-Vertical et North-Vertical.

Pour **Limal**, on détecte les ondes primaire et secondaire. Ainsi sur les composantes East-North l'onde secondaire arrive à 00:16:55.06, sur les composantes East-Vertical, elle arrive à 00:16:55.04. Sur les composantes North-Vertical, elle arrive à 00:16:55.01. L'onde primaire n'est détectée qu'à 00:16:53.70 sur les composantes North-Vertical.

Pour **Genappe**, on trouve l'arrivée des ondes primaire et secondaire. Ainsi sur les composantes East-Vertical, l'onde primaire arrive à 00:16:53.99 et l'onde secondaire arrive à 00:16:54.07. Sur les composantes North-Vertical, l'onde primaire arrive à 00:16:53.99 et l'onde secondaire à 00:16:54.09.

Pour **Grand-Leez**, on détecte l'arrivée des ondes secondaires. Ainsi sur les composantes East-North l'onde secondaire arrive à 00:16:56.260 et sur les composantes North-Vertical elle arrive à 00:16:56.258 et l'onde primaire arrive à 00:16:54.19 (voir Table 6.3 en annexe).

Analyse de l'enregistrement continu du 03-03-2009

Pour **Ottignies**, le spectre croisé nous permet de détecter l'arrivée de l'onde secondaire à 03:23:34.852 sur l'intervalle [1400, 1600] avec les composantes East-North. Sur l'intervalle [1600, 1800] et les composantes Vertical-East on détecte l'arrivée de l'onde secondaire à 03:27:25.497. A cause de la grande énergie de l'onde précédente on ne détecte pas l'arrivée des ondes de volume et pour pallier ce problème on s'est restreint sur un petit intervalle de 3 s c'est-à-dire [3429, 3432] et on parvient à détecter l'arrivée de l'onde primaire à 03:57:09.572 sur les composantes Vertical-North et l'onde secondaire arrive à 03:57:10.366 sur les composantes Vertical-East. Sur l'intervalle [5200, 5400] on détecte les arrivées des ondes de volume à 04:29:58.1 pour l'onde primaire et à 04:29:58.954 sur les composantes Vertical-North. Pour l'intervalle [5600, 5800] on a l'arrivée de l'onde secondaire à 04:34:00.072006 sur les composantes Vertical-East.

Pour **Genappe**, sur l'intervalle [1400, 1600] avec les composantes Vertical-East on détecte l'arrivée de l'onde secondaire à 03:23:35.866 et à cause de la grande énergie de cette onde on ne détecte pas l'arrivée de l'onde suivante et pour pallier ce problème on se restreint sur un petit intervalle [1573, 1577] avec les composantes Vertical-East et on détecte l'arrivée de l'onde primaire à 03:26:13.768 et l'onde secondaire arrive à 03:26:15.18. Sur l'intervalle [1600, 1800] et les composantes East-North

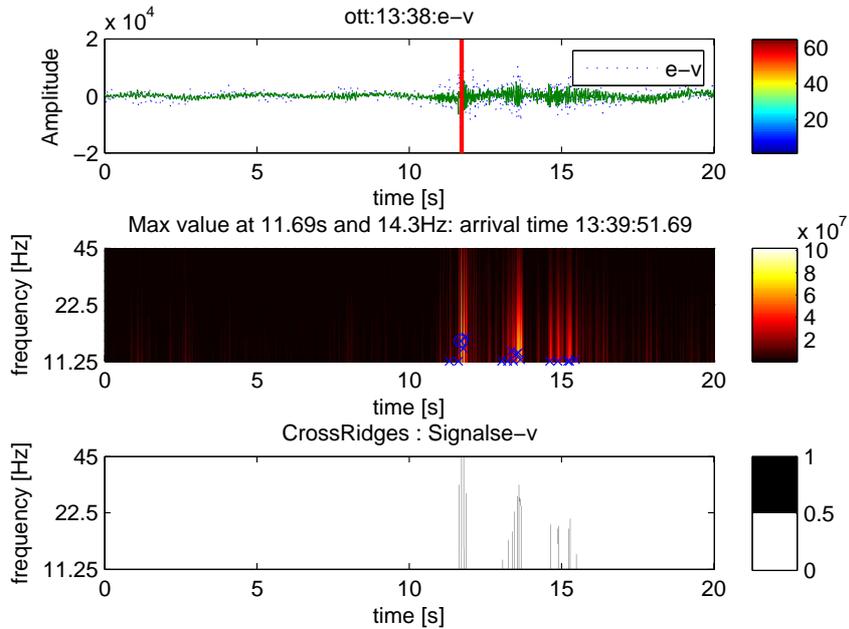


FIGURE 5.8 – Spectre croisé de la TO : composantes [East-Vertical]-OTT-Séisme du 12-08-2008

on détecte l'arrivée de l'onde secondaire à 03:27:26.716. Sur l'intervalle [5600, 5800] et les composantes East-North on détecte l'arrivée de l'onde secondaire à 04:34:01.156.

Pour **Grand-Leez**, en prenant l'intervalle [1400, 1600] on détecte l'arrivée de l'onde secondaire à 03:23:37.12 sur les composantes Vertical-North et en se restreignant sur l'intervalle [1433, 1437] on détecte l'arrivée de l'onde primaire à 03:23:53.156 et l'onde secondaire à 03:23:54.75 sur les composantes Vertical-East. Sur l'intervalle [1600, 1800] on détecte l'arrivée de l'onde secondaire à 03:27:27.766 sur les composantes Vertical-East et sur l'intervalle [5200, 5400] on détecte l'arrivée de l'onde primaire à 04:29:59.436. Sur l'intervalle [5400, 5600] on détecte l'arrivée de l'onde secondaire à 04:30:01.11 sur les composantes Vertical-East (voir Table 6.4 en annexe). Ainsi on a le tableau (voir Table 5.2) résumant la qualité de la méthode utilisée en utilisant l'expression (5.28) donnant l'erreur moyenne quadratique (voir Table 5.2). Le calcul de localisation tradi-

tionnel donne $Err_t < 0.3$ s. L'histogramme nous donnant la distribu-

Errors-Components	Err_t1
East(e)	0.3117
North(n)	0.0722
Vertical(v)	0.1001
Errors-Cross components(Station)	Err_t2
e-n	0.0514
e-v	0.0807
n-v	0.1310

TABLE 5.2 – Erreurs moyennes quadratiques sur le spectre de la TO Err_t1 , sur le spectre croisé de la TO Err_t2 , des Séismes analysés

tion cumulée montre que sur les nonante-cinq mesures effectuées pour la différence des temps d'arrivée, on a que la valeur médiane correspond à 0.094 s tandis que la valeur de 0.133 s correspond au percentile 0.84 d'apparaître (voir Figure 5.9) tandis que pour la routine d'alerte au tsunami "Seiscomp3" développé par GFZ Potsdam on a obtenu respectivement 0.083 s et 0.87 s pour les mêmes mesures (voir Figure 5.10) :

Les tableaux suivants nous donnent le pourcentage de succès de la détection des temps d'arrivée des ondes primaire et secondaire en fonction du spectre de puissance et du spectre croisé de la transformée en ondelettes dans les différentes stations pour les séismes du 12-08-2008 et du 23-08-2008 (voir Tableaux 5.3 et 5.4).

WPS (12-08-08)	OTT	OT5	GRZ
T_p	0%	83.33%	50%
T_s	100%	100%	100%
WCS (12-08-08)	OTT	OT5	GRZ
T_p	0%	66.66%	0%
T_s	100%	100%	100%

TABLE 5.3 – Succès de détection des temps d'arrivée des ondes primaire et secondaire du séisme analysé du 12-08-2008

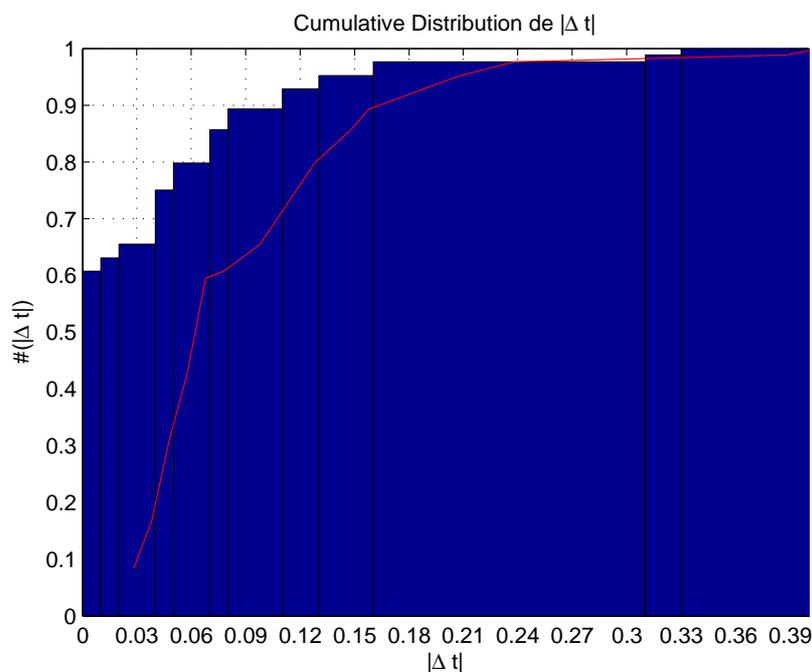


FIGURE 5.9 – Histogramme de la distribution de la différence des temps d'arrivée des ondes P et S des Séismes du 12-08-2008 et du 23-08-2008 par l'ORB et la méthode des ondelettes

5.5 Confirmation des critères d'identification des tremblements de terre

Focalisons-nous sur un cas précis qui est le tremblement de terre du 12-08-2008 enregistré sur la station d'**Ottignies** et sur la composante East. En appliquant le spectre de puissance de la transformée en ondelettes, on détecte un événement sismique à 13:39:51.68 avec les critères choisis qui sont la longueur de l'ondelette, l'intervalle fréquentiel et la longueur des arêtes. En essayant de regarder la première partie du signal c'est-à-dire dans l'intervalle $[0, 10]$ on y détecte de petits tremblements de terre qui sont noyés dans le bruit de fond .

En prenant l'intervalle $[10, 15]$ on voit qu'il y a réellement un événement sismique qui arrive.

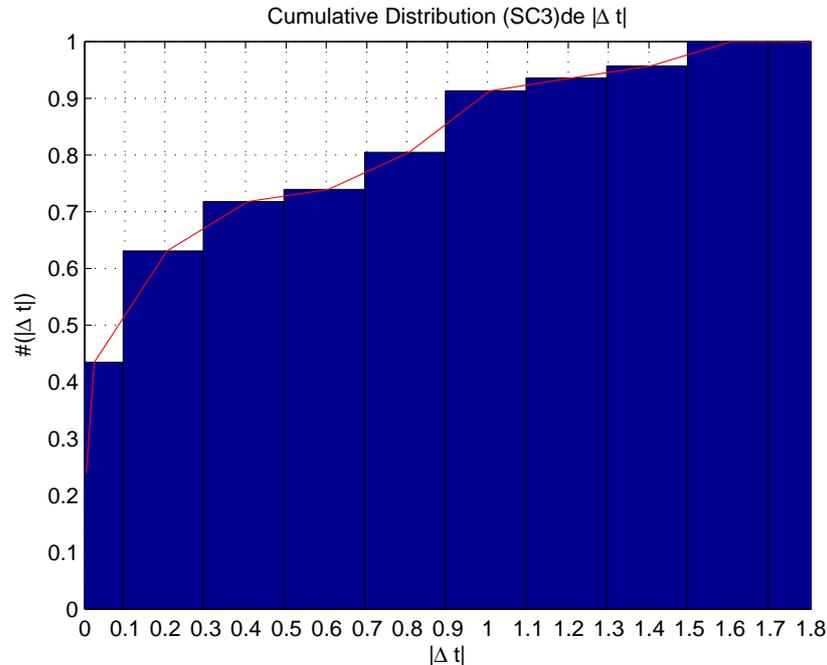


FIGURE 5.10 – Histogramme de la distribution de la différence des temps d’arrivée des ondes P par l’ORB et par la routine “Seiscomp3” avec les ondes P

Enfin en prenant l’intervalle $[15, 20]$ on voit qu’il y a de petits tremblements qui sont présents (voir Figure 5.11).

5.6 Identification automatique des événements sismiques dans les enregistrements continus

Lors d’une séquence sismique, même les événements les plus petits sont enregistrés par les stations sismiques mobiles installées en urgence dans des conditions en général très bruitées. Les nombreuses perturbations locales font que le sismologue est obligé de regarder tous les fichiers individuels pour espérer identifier les séismes les plus faibles.

Dans cette thèse, la deuxième tâche a été d’utiliser particulièrement le spectre croisé entre stations et la coïncidence des événements pour

WPS (23-08-08)	OTT	OT4	OT5	GRZ
T_p	33.33%	33.33%	50%	50%
T_s	100%	100%	100%	100%
WCS (23-08-08)	OTT	OT4	OT5	GRZ
T_p	66.66%	33.33%	100%	50%
T_s	100%	100%	0%	100%

TABLE 5.4 – Succès de détection des temps d’arrivée des ondes primaire et secondaire du séisme analysé du 23-08-2008

réaliser cette identification de petits événements de manière automatique. Pour ce qui est de cette coïncidence nous avons appliqué la méthode développée pour la mesure des temps d’arrivée, en considérant les parties du signal ayant des caractéristiques fréquentielles propres aux séismes dans chacune des stations. Ici on entend les critères liés à l’ondelette qui sont entre autre sa largeur, sa fréquence et pour le signal analysé, sa période d’échantillonnage et l’intervalle fréquentiel ainsi qu’un choix approprié d’octaves et de voix pour une bonne résolution. Lorsqu’une coïncidence temporelle existait entre les différentes stations, nous avons analysé si elle pouvait indiquer l’existence d’un séisme local.

5.6.1 Spectre croisé entre stations

Comme on a vu le spectre croisé de la transformée en ondelettes au niveau de chaque station, l’étape suivante est de faire ce croisement cette fois-ci entre stations et on traitera seulement l’enregistrement continu du 03-03-2009.

5.6.2 Enregistrement continu du 03-03-2009

Pour les stations **OTT-OT5** sur l’intervalle [1400, 1600] et les composantes East, on détecte un événement sismique à 03:23:34.894 et en se restreignant à l’intervalle [1431, 1437] sur les composantes Vertical, on détecte l’événement sismique à 03:23:52.469. Sur l’intervalle [3429, 3432] avec les composantes East, on a l’événement sismique à 03:57:10.372. Sur l’intervalle [5200, 5400], on détecte l’événement sismique à 04:29:58.94 sur les composantes North et sur l’intervalle [5600, 5800] et les composantes North, on détecte l’événement sismique à 04:34:00.096.

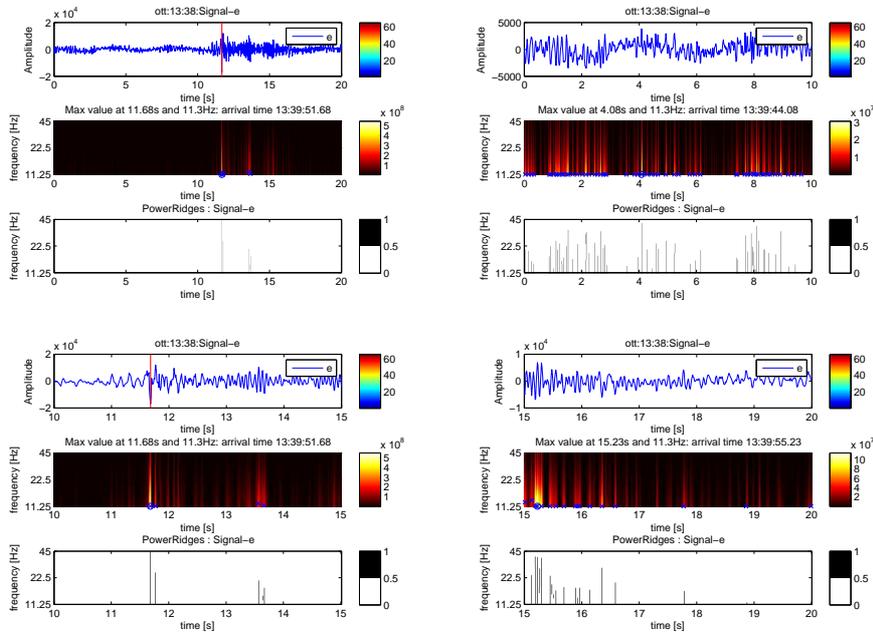


FIGURE 5.11 – Spectre de puissance de la TO : composante [East]-OTT- Séisme du 12-08-2008

Pour les stations **OTT-GRZ**, on a sur l'intervalle [1400, 1600] avec les composantes Vertical l'événement sismique arrivant à 03:23:35.42. En se restreignant à l'intervalle [1431, 1437] et sur les composantes East, l'événement sismique arrive à 03:23:52.91. Sur l'intervalle [1600, 1800] et les composantes North, l'événement sismique arrive à 03:27:25.47 et sur l'intervalle [3429, 3432] et les composantes North, l'événement sismique arrive à 03:57:10.348. Sur l'intervalle [5200, 5400] et les composantes East, l'événement sismique arrive à 04:29:58.962 et sur l'intervalle [5400, 5600] avec les composantes North, on détecte l'événement sismique à 04:30:01.11. Sur l'intervalle [5600, 5800] et les composantes Vertical, l'événement sismique arrive à 04:34:00.2156.

Pour les stations **OT5-GRZ**, on détecte l'événement sismique sur l'intervalle [1400, 1600] et les composantes North qui arrive à 03:23:37.15 (voir Figure 5.12) et en se restreignant à l'intervalle [1431, 1437] et les composantes Vertical, l'événement sismique arrive à 03:23:53.189. Sur l'intervalle [1600, 1800] et sur les composantes Vertical, l'événement

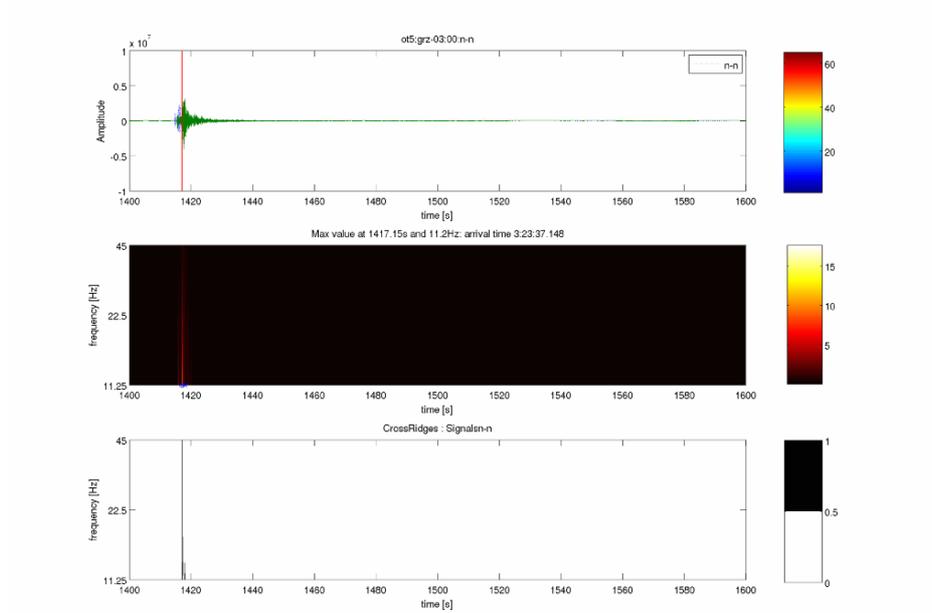


FIGURE 5.12 – Spectre croisé de la TO : Stations [OT5-GRZ]-[n]-Enregistrement du 03-03-2009

sismique arrive à 03:27:26.053. Sur l'intervalle [3429, 3432] et les composantes Vertical, l'événement arrive à 03:57:11.424. Pour l'intervalle [5200, 5400] et les composantes East, l'événement arrive à 04:29:59.491 et sur l'intervalle [5400, 5600] et les composantes North, l'événement sismique arrive à 04:30:01.093. Sur l'intervalle [5600, 5800] et les composantes Vertical, l'événement sismique arrive à 04:34:00.58795 (voir Table 6.5 en annexe).

Le tableau suivant nous donne le succès de la détection des temps d'arrivée des ondes primaire et secondaire en fonction du spectre de puissance et du spectre croisé de la transformée en ondelettes dans les différentes stations pour l'enregistrement du 03-03-2009 (voir Tableau 5.5).

Pour le critère concernant la longueur de l'arête qui doit être longue en parfaite harmonie avec [9] et les spectres d'énergie et de vitesse qui sont larges pour les séismes du Brabant Wallon (voir Figure 5.6), nous avons utilisé la longueur de l'arête $l_{v_i} \geq 0.8$. En faisant varier cette

WPS (03-03-09)	OTT	OT5	GRZ
T_p	50%	62.5%	50%
T_s	75%	62.5%	62.5%
WCS (03-03-09)	OTT	OT5	GRZ
T_p	37.5%	12.5%	25%
T_s	75%	50.5%	62.5%

TABLE 5.5 – Succès de détection des temps d’arrivée des ondes primaire et secondaire de l’Enregistrement du 03-03-2009

longueur, nous avons obtenu que la longueur convenable, c’est-à-dire nous permettant de détecter le maximum des temps d’arrivée des ondes **secondaires-s** pour tous les séismes analysés est 0.87 (voir Figure 5.13).

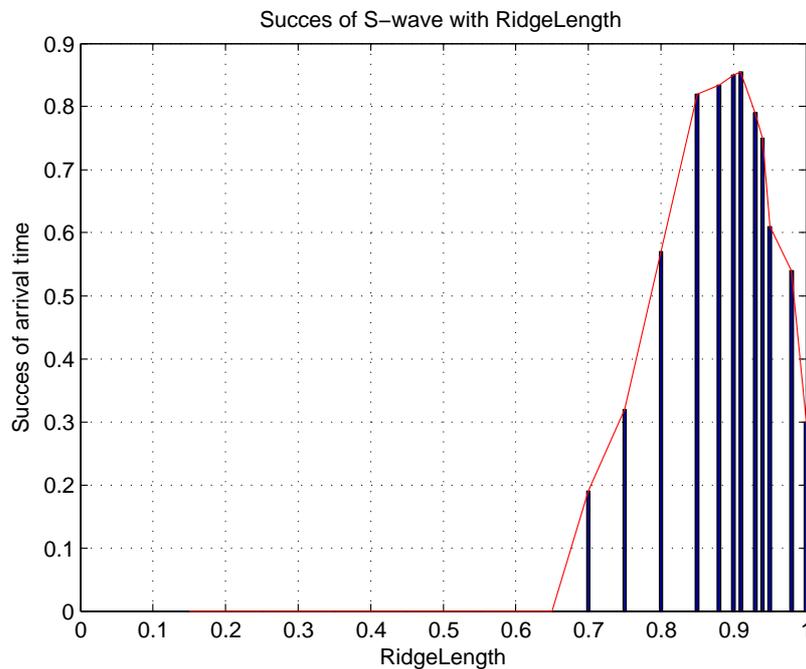


FIGURE 5.13 – Diagramme des succès pour les ondes s en fonction de la longueur de l’arête pour tous les séismes analysés

5.6.3 Coïncidence entre stations

Ayant obtenu les spectres de puissance, on va exploiter les arêtes pour chaque station et en utilisant les composantes de même nom et en prenant un groupe d'arêtes dans un intervalle de 2 s avec une séparation de groupe de 5 s. Ainsi on aura sur certains intervalles temporels qu'aucun événement n'apparaît et il sera assimilé au bruit de fond sur ces intervalles. Dans les intervalles [600, 800] et les composantes Vertical on a des coïncidences entre deux stations [**GRZ-OTT**] à 03:10:54.841, sur [1200, 1400] et les composantes Vertical entre les stations [**OTT-OT5**] à 03:23:08.542 qui annonce probablement l'arrivée des ondes primaire et secondaire. Sur les intervalles [2400, 2600], [2800, 3000], [3200, 3400] avec composantes Vertical et entre les stations [**GRZ-OT5**], on a les événements qui ne correspondent pas à l'arrivée des ondes de volume et que j'ai appelés événements non sismiques qui arrivent respectivement à 03:42:19.9279, à 03:47:37.49 et à 03:54:12.235 (voir Figure 5.14). Sur l'intervalle [3400, 3600] avec composantes North et entre les stations [**GRZ-OTT**], on a un événement qui arrive à 03:59:02.8612 mais qui en réalité est un événement non sismique et sur l'intervalle [3600, 3800] avec composantes North et entre les stations [**GRZ-OTT**], on a un événement non sismique qui arrive à 04:00:37.883. Sur l'intervalle [4800, 5000], on a un événement qui arrive à 04:21:02.04 sur les composantes Vertical et entre les stations [**GRZ-OT5**] et il en est de même sur l'intervalle [5000, 5200], l'événement arrive à 04:25:55.4544 (voir Table 6.6 en annexe). Pour la coïncidence des événements sismiques, on aura deux types à savoir la coïncidence entre deux stations et entre trois stations. Ainsi on a la coïncidence entre deux stations sur les intervalles [1400, 1600] avec les composantes East, deux événements qui arrivent à 03:23:36.3384 entre les stations [**GRZ-OT5**] et à 03:23:35.8912 entre les stations [**OTT-OT5**] (voir Figure 5.15) et sur les composantes North et entre les mêmes stations on a les arrivées à 03:23:36.3562 et à 03:23:35.9841 respectivement. Comme on l'a fait pour le spectre croisé entre stations, on s'est restreint encore une fois sur de petits intervalles pour détecter des événements sismiques. On a deux événements sur l'intervalle [1573, 1577] avec les composantes East c'est-à-dire entre stations [**GRZ-OT5**] à 03:26:15.8755 et entre les stations [**OTT-OT5**] à 03:26:14.96066. Sur l'intervalle [5400, 5600] avec les composantes East, l'événement sismique est à 04:30:00.36912 entre les stations [**OTT-OT5**] et sur l'intervalle [5600, 5800] avec les composantes East, l'événement arrive à 04:34:00.71731 entre les stations [**OTT-OT5**] et sur les com-

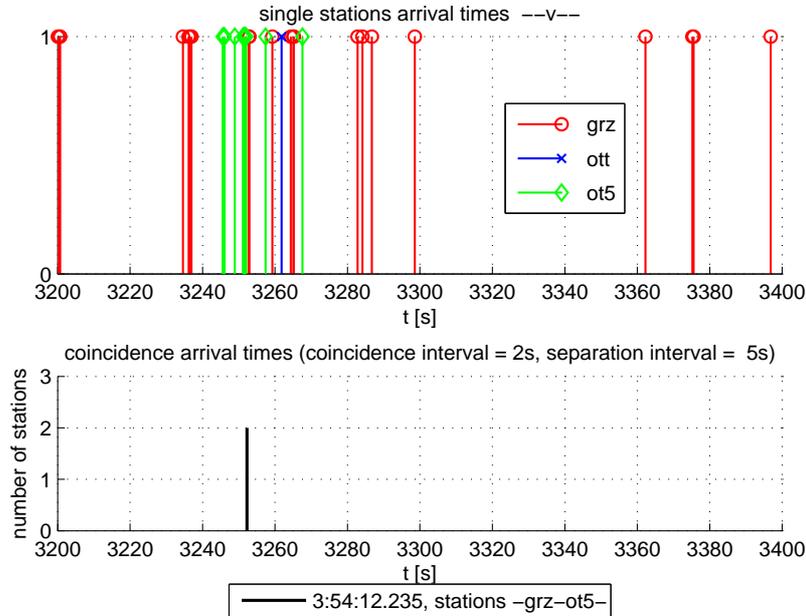


FIGURE 5.14 – Coincidence des TO : Stations [GRZ-OT5]-[v]-
 Enregistrement du 03-03-2009

posantes North, l'événement est à 04:34:00.99530 (voir Table 6.7 en annexe). Pour la coincidence entre trois stations, on a sur les intervalles [1400, 1600] avec les composantes Vertical l'événement arrivant à 03:23:35.2394 et sur l'intervalle [1433, 1437] avec composantes East, l'événement arrive à 03:23:53.9439, sur les composantes North l'événement arrive à 03:23:54.2458 et avec les composantes à 03:23:54.611. Sur l'intervalle [1573, 1577] avec les composantes North, l'événement arrive à 03:26:15.4090 et avec les composantes Vertical à 03:26:14.6703. Sur l'intervalle [1600, 1800] avec les composantes North, l'événement arrive à 03:27:26.7150. Sur l'intervalle [3429, 3432] avec les composantes Vertical, l'événement sismique arrive à 03:57:11.6773 (voir Figure 5.16) et sur l'intervalle [5200, 5400] avec les composantes East, l'événement arrive à 04:29:59.32. Sur l'intervalle [5200, 5400], l'événement sismique arrive respectivement à 04:29:59.2118 et à 04:29:58.7571 sur les composantes North et Vertical. Sur l'intervalle [5400, 5600], l'événement sismique ar-

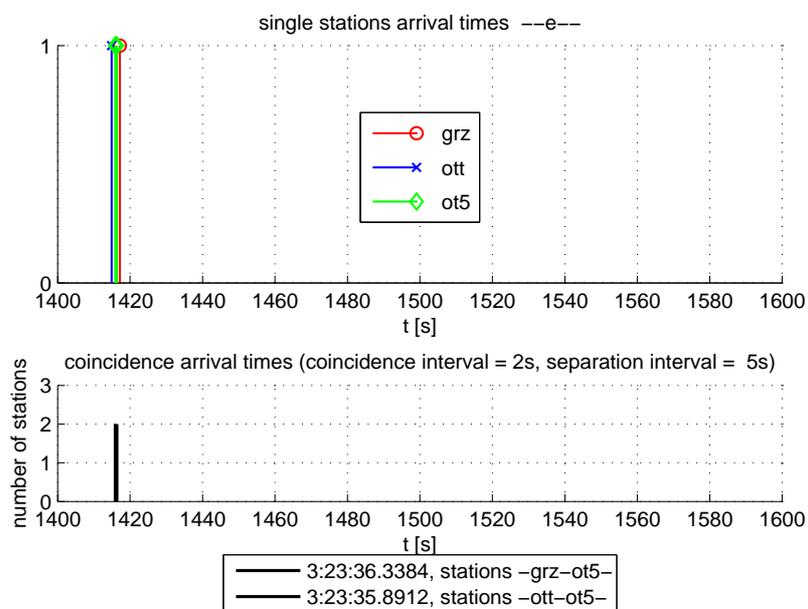


FIGURE 5.15 – Coïncidence des TO : Stations [GRZ-OT5] et [OTT-OT5]-[e]-Enregistrement du 03-03-2009

rive à 04:30:00.8452 et à 04:30:01.070 sur les composantes North et Vertical respectivement et enfin sur l'intervalle [5600, 5800], l'événement sismique arrive à 04:34:00.62119 (voir Table 6.8 en annexe).

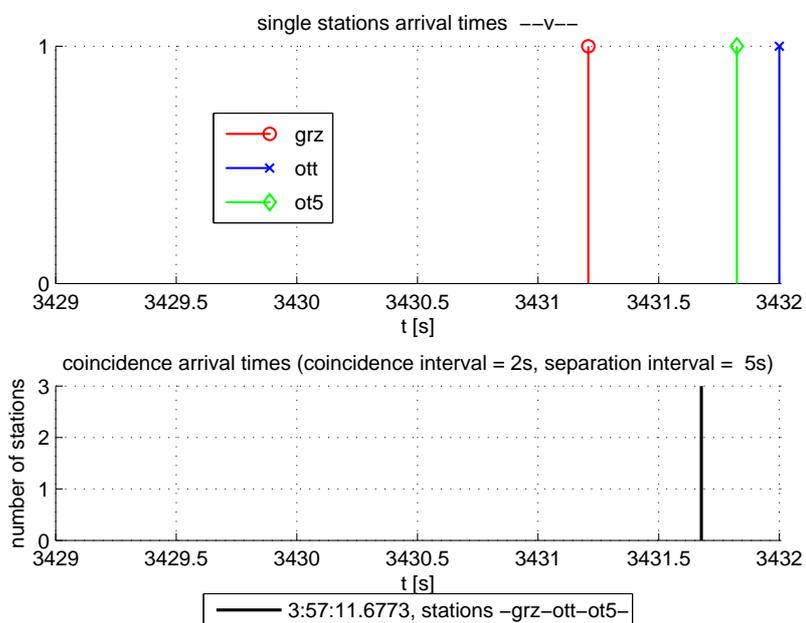


FIGURE 5.16 – Coïncidence des TO : Stations [GRZ-OT5-OTT]-[v]-
Enregistrement du 03-03-2009

Chapitre 6

Conclusion générale

Le travail de recherche présenté dans cette thèse consiste à analyser l'utilisation des "ondelettes" sur les signaux sismiques afin d'identifier les ondes de volume générées par les tremblements de terre et d'en déterminer les temps d'arrivée.

Nous avons concentré notre travail sur l'analyse de données fournies par un réseau dense de stations sismiques destiné à l'étude de sismicité locale. Nous avons travaillé sur les données fournies par le réseau local dense installé par l'ORB pour l'étude de la séquence de tremblements de terre de juillet 2008 à septembre 2009 dans le Brabant Wallon.

Les stations d'un réseau temporaire de ce type sont installées rapidement dans les régions considérées suivant une géométrie permettant de bien localiser des événements sismiques. Il n'est donc pas tenu compte de la qualité des sites et l'enregistrement sismique contient généralement de nombreux signaux perturbateurs, ce qui rend difficile l'identification des événements sismiques les plus petits.

D'autre part, le nombre de séismes lors de séquences sismiques peut-être très grand (par exemple plus de 200 événements en 2 jours pour les répliques du séisme de Roermond en 1992). Il est important de localiser rapidement ces événements et donc de développer des méthodes automatiques de mesure des temps d'arrivée.

Le fil conducteur de notre approche, qui est une analyse locale, contrairement aux méthodes classiques traditionnelles, est de garder l'observation simultanée de l'information temporelle et fréquentielle (échelle) du signal sismique afin de décrire d'une façon plus fine, et les ondelettes constituent un outil adéquat. Concrètement, les ondes sismiques sont des phénomènes transitoires, non stationnaires et dans ce

cas la transformée de Fourier ne convient pas. Or les ondelettes donnent une information à la fois en temps et en fréquence ($1/a$) contrairement à Fourier et sont sensibles aux discontinuités (changement de régime) qui nous donnent l'instant d'arrivée d'une onde. La méthode développée ici fournit en outre une corrélation positive ou négative entre différents signaux. Pour ce qui est des différentes composantes d'un même signal, on a pu avoir l'information positive sur l'orientation car dans certains cas on ne trouve pas l'onde P et c'est dû au mécanisme à la source des tremblements de terre. Dans la direction du rai qui arrive à cette station, il y a très peu d'énergie rayonnée sous forme d'onde P . Pour les signaux des différentes stations, on est parvenu à éliminer les perturbations locales, c'est-à-dire qui ne sont pas visibles partout, et garder uniquement le vrai signal, on a donc obtenu une information positive sur le retard, car la distance implique la vitesse.

Les caractéristiques de la transformée en ondelettes qui permettent de distinguer les ondes sismiques des différentes perturbations présentes dans le signal sont le choix de l'ondelette, à savoir l'ondelette de Morlet utilisée avec sa petite largeur à laquelle nous avons ajouté les termes correctifs pour qu'elle soit admissible, et l'intervalle de fréquence utilisé. Il faut signaler aussi que l'ondelette de Morlet utilisé sans termes correctifs nous avait donné des résultats presque similaires que l'ondelette de Morlet corrigé.

De nombreux bruits locaux et régionaux enregistrés par les stations sismiques ont un contenu fréquentiel relativement limité. Le contenu fréquentiel des ondes de volume des séismes est plus étendu. Dans le cas des séismes du Brabant Wallon, le contenu fréquentiel va de quelques Hz à des fréquences supérieures à 50 Hz.

Nous utilisons les arêtes verticales du squelette de la transformée en ondelettes qui est une collection de lignes de maxima locaux qui permettent de détecter avec précision les discontinuités et nous constatons que la longueur de ces arêtes est un bon indicateur de la présence des ondes de volume en parfaite harmonie physiquement avec les spectres d'énergie et de vitesse larges. En faisant varier également la longueur de l'arête, nous avons remarqué que la longueur de 0.86 correspond au maximum de détection des ondes secondaires s de 85.5%.

Bien que nous ayons travaillé sur un ensemble restreint de données, notre travail montre que la mesure des temps d'arrivée obtenue par la méthode automatique basée sur les ondelettes est très proche des mesures visuelles réalisées par un sismologue professionnel.

Sur environ 46 mesures, la valeur médiane de la différence des temps d'arrivée est de 0.07 s, le percentile 0.84 est 0.87 s par la méthode "Seiscomp3" tandis que notre méthode donne les valeurs de 0.094 s et 0.133 s pour 84 mesures.

Par comparaison, la mesure automatique réalisée par la routine de détection automatique du programme d'alerte au tsunami "Seiscomp3" développé par le GFZ Potsdam donne des différences plus importantes pour des événements locaux belges.

Il serait intéressant d'utiliser les 2 programmes sur un même ensemble de données locales pour réellement essayer de mettre en évidence la meilleure résolution de la méthode par ondelettes.

En ce qui concerne la détection automatique des événements sismiques dans les signaux bruités, notre analyse montre que l'emploi des ondelettes est prometteur. Suivant certaines conditions d'analyse, nous avons pu identifier tous les événements présents dans la fenêtre de deux heures analysée en continu, sans que trop de perturbations dans le signal ne soient identifiées comme événements.

L'utilisation en routine de ce travail demandera bien sûr des développements informatiques pour qu'elle puisse être réellement opérationnelle.

Annexes

Nous vous présentons en annexe tous les tableaux des résultats des spectres de puissance, des spectres croisés entre les composantes et entre stations et enfin ceux des coïncidences des événements.

Ainsi nous aurons en premier lieu les résultats des spectres de puissance de la transformée en ondelettes pour les séismes du 12-08-2008 et du 23-08-2008 et ceux de l'enregistrement du 03-03-2009 avec "h:m:s" désignant le temps d'arrivée en heures, minutes et secondes et le mot "Inter.-comp" signifiant l'intervalle et la composante considérés.

En deuxième lieu, nous aurons les résultats des spectres croisés de la transformée en ondelettes entre les composantes au sein d'une station pour les mêmes enregistrements que précédemment.

En dernier lieu, nous aurons les résultats des spectres croisés de la transformée en ondelettes entre stations et les coïncidences pour les événements sismiques.

Station	Onde P (h:m:s)	Δtp	Onde S (h:m:s)	Δts
OTT-ORB(12-08-2008)	13:39:50.82	–	13:39:51.64	–
OTT- $L_{v_i}(e)$	–	–	13:39:51.6789	0.0389
OTT- $\bar{L}_{v_i}(e)$	–	–	13:39:51.68	0.04
OTT- $L_{v_i}(n)$	–	–	13:39:51.69	0.05
OTT- $\bar{L}_{v_i}(n)$	–	–	13:39:51.69	0.05
OTT- $L_{v_i}(v)$	–	–	13:39:51.6102	0.0302
OTT- $\bar{L}_{v_i}(v)$	–	–	13:39:51.61	0.03
OT5-ORB	13:39:51.35	–	13:39:52.65	–
OT5- $L_{v_i}(e)$	–	–	13:39:52.68	0.03
OT5- $\bar{L}_{v_i}(e)$	–	–	13:39:52.69	0.04
OT5- $L_{v_i}(n)$	13:39:51.58	0.23	13:39:52.67	0.02
OT5- $\bar{L}_{v_i}(n)$	13:39:51.58	0.23	13:39:52.67	0.02
OT5- $L_{v_i}(v)$	13:39:51.46	0.09	13:39:52.61	0.04
OT5- $\bar{L}_{v_i}(v)$	13:39:51.46	0.09	13:39:52.63	0.02
GRZ-ORB	13:39:52.15	–	13:39:53.80	–
GRZ- $L_{v_i}(e)$	–	–	13:39:53.826	0.026
GRZ- $\bar{L}_{v_i}(e)$	–	–	13:39:53.826	0.026
GRZ- $L_{v_i}(v)$	13:39:52.1	0.05	13:39:53.938	0.138
GRZ- $\bar{L}_{v_i}(v)$	13:39:52.1	0.05	13:39:53.922	0.122
OTT-ORB(23-08-2008)	00:16:53.33	–	00:16:54.16	–
OTT- $L_{v_i}(e)$	–	–	00:16:54.22	0.06
OTT- $\bar{L}_{v_i}(e)$	–	–	00:16:54.22	0.06
OTT- $L_{v_i}(n)$	–	–	00:16:54.30	0.14
OTT- $\bar{L}_{v_i}(n)$	–	–	00:16:54.21	0.05
OTT- $L_{v_i}(v)$	00:16:53.27	0.06	00:16:54.22	0.06
OTT- $\bar{L}_{v_i}(v)$	00:16:53.27	0.06	00:16:54.22	0.06
OT4-ORB	00:16:53.75	–	00:16:54.86	–
OT4- $L_{v_i}(e)$	–	–	00:16:55.01	0.15
OT4- $\bar{L}_{v_i}(e)$	–	–	00:16:54.98	0.12
OT4- $L_{v_i}(n)$	–	–	00:16:55.04	0.18
OT4- $\bar{L}_{v_i}(n)$	–	–	00:16:55.04	0.18
OT4- $L_{v_i}(v)$	00:16:53.61	0.14	00:16:54.94	0.08
OT4- $\bar{L}_{v_i}(v)$	00:16:53.73	0.02	00:16:54.94	0.08
OT5-ORB	00:16:53.88	–	–	–
OT5- $L_{v_i}(n)$	–	–	00:16:55.55	–
OT5- $\bar{L}_{v_i}(n)$	–	–	00:16:55.55	–
OT5- $L_{v_i}(v)$	00:16:53.99	0.11	00:16:54.07	–
OT5- $\bar{L}_{v_i}(v)$	00:16:53.99	0.11	00:16:54.07	–
GRZ-ORB	00:16:54.59	–	00:16:56.22	–
GRZ- $L_{v_i}(n)$	–	–	00:16:56.262	0.042
GRZ- $\bar{L}_{v_i}(n)$	–	–	00:16:56.262	0.042
GRZ- $L_{v_i}(v)$	00:16:54.622	0.032	00:16:56.306	0.186
GRZ- $\bar{L}_{v_i}(v)$	00:16:54.622	0.032	00:16:56.306	0.186

TABLE 6.1 – Résultats du spectre de puissance de la TO sur les composantes [East,North, Vertical]-[OTT-OT4-OT5-GRZ]-Séismes du 12-08-2008 et du 23-08-2008

Station	Inter.-Comp.	Onde P	Δtp	Onde S	Δts
OTT-ORB	[1400,1600]	03:23:34.04	—	03:23:34.84	—
OTT- L_{v_i}	[1400,1600]-[v]	03:23:34.05	0.01	03:34:34.834	0.006
OTT- \bar{L}_{v_i}	[1400,1600]-[v]	03:23:34.05	0.01	03:34:34.834	0.006
OTT-ORB	[1573,1577]	03:26:13.11	—	03:26:13.91	—
OTT- L_{v_i}	[1573,1577]-[e]	—	—	03:26:13.952	0.042
OTT- \bar{L}_{v_i}	[1573,1577]-[e]	—	—	03:26:13.952	0.042
OTT-ORB	[1600,1800]	03:27:24.68	—	03:27:25.49	—
OTT- L_{v_i}	[1600,1800]-[e]	03:27:25.60	0.92	—	—
OTT- \bar{L}_{v_i}	[1600,1800]-[e]	03:27:25.61	0.93	—	—
OTT- L_{v_i}	[1600,1800]-[n]	—	—	03:27:25.5	0.01
OTT- \bar{L}_{v_i}	[1600,1800]-[n]	—	—	03:27:25.5	0.01
OTT-ORB	[5200,5400]	04:29:58.08	—	04:29:58.90	—
OTT- L_{v_i}	[5200,5400]-[v]	04:29:58.086	0.006	04:29:59.06	0.16
OTT- \bar{L}_{v_i}	[5200,5400]-[v]	04:29:58.086	0.006	—	—
OTT- L_{v_i}	[5200,5400]-[n]	—	—	04:29:58.956	0.056
OTT- \bar{L}_{v_i}	[5200,5400]-[n]	—	—	04:29:58.956	0.056
OTT-ORB	[5600,5800]	04:33:59.24	—	04:34:00.16	—
OTT- L_{v_i}	[5600,5800]-[v]	04:33:59.264	0.024	04:34:00.216	0.056
OTT- L_{v_i}	[5600,5800]-[e]	—	—	04:34:00.071	0.055
OT5-ORB	[1400,1600]	03:23:34.59	—	03:23:35.80	—
OT5- L_{v_i}	[1400,1600]-[v]	03:23:34.652	0.062	03:34:36.008	0.208
OT5-ORB	[1432,1435]	03:23:52.34	—	—	—
OT5- L_{v_i}	[1432,1435]-[e]	03:23:52.316	0.024	—	—
OT5-ORB	[1600,1800]	03:27:25.25	—	03:27:26.52	—
OT5- L_{v_i}	[1600,1800]-[n]	—	—	03:27:26.828	0.308
OT5-ORB	[3429,3432]	03:57:10.15	—	03:57:11.39	—
OT5- L_{v_i}	[3429,3432]-[e]	03:57:09.628	0.522	—	—
OT5- L_{v_i}	[3429,3432]-[v]	—	—	03:57:11.824	0.438
OT5-ORB	[5200,5400]	04:29:58.64	—	04:29:59.91	—
OT5- L_{v_i}	[5200,5400]-[v]	04:29:58.674	0.034	—	—
OT5- L_{v_i}	[5200,5400]-[n]	—	—	04:29:59.928	0.018
OT5-ORB	[5600,5800]	04:33:59.80	—	04:34:01.05	—
OT5- L_{v_i}	[5600,5800]-[v]	04:34:00.063995	0.264	—	—
OT5- L_{v_i}	[5600,5800]-[e]	—	—	04:34:01.190	0.140
GRZ-ORB	[1400,1600]	03:23:35.40	—	03:23:37.09	—
GRZ- L_{v_i}	[1400,1600]-[v]	03:23:35.432	0.032	—	—
GRZ- L_{v_i}	[1400,1600]-[e]	—	—	03:23:37.14	0.05
GRZ-ORB	[1433,1437]	03:23:53.00	—	03:23:54.64	—
GRZ- L_{v_i}	[1433,1437]-[v]	03:23:53.01	0.01	03:23:54.6	0.04
GRZ-ORB	[1600,1800]	—	—	03:27:27.69	—
GRZ- L_{v_i}	[1600,1800]-[n]	—	—	03:27:27.73	0.040
GRZ-ORB	[5200,5400]	04:29:59.40	—	04:30:01.07	—
GRZ- L_{v_i}	[5200,5400]-[n]	04:29:59.432	0.032	—	—
GRZ- L_{v_i}	[5400,5600]-[n]	—	—	04:30:01.12	0.05
GRZ-ORB	[5600,5800]	04:34:00.56	—	04:34:02.23	—
GRZ- L_{v_i}	[5600,5800]-[v]	04:34:00.596	0.036	—	—

TABLE 6.2 – Résultats du spectre de puissance de la TO-[OTT-OT5-GRZ]-Enregistrement du 03-03-2009

Station	Onde P (h:m:s)	Δtp	Onde S (h:m:s)	Δts
OTT-ORB(12-08-2008)	13:39:50.82	–	13:39:51.64	–
OTT- $L_{v_i}(e-n)$	–	–	13:39:51.69	0.05
OTT- $\bar{L}_{v_i}(e-n)$	–	–	13:39:51.69	0.05
OTT- $L_{v_i}(e-v)$	–	–	13:39:51.69	0.05
OTT- $\bar{L}_{v_i}(e-v)$	–	–	13:39:51.69	0.05
OTT- $L_{v_i}(n-v)$	–	–	13:39:51.70	0.06
OTT- $\bar{L}_{v_i}(n-v)$	–	–	13:39:51.70	0.06
OT5-ORB	13:39:51.35	–	13:39:52.65	–
OT5- $L_{v_i}(e-n)$	–	–	13:39:52.68	0.03
OT5- $\bar{L}_{v_i}(e-n)$	–	–	13:39:52.67	0.02
OT5- $L_{v_i}(e-v)$	13:39:51.43	0.12	13:39:52.69	0.04
OT5- $\bar{L}_{v_i}(e-v)$	13:39:51.43	0.12	13:39:52.69	0.04
OT5- $L_{v_i}(n-v)$	13:39:51.44	0.11	13:39:52.72	0.07
OT5- $\bar{L}_{v_i}(n-v)$	13:39:51.44	0.11	13:39:52.78	0.09
GRZ-ORB	13:39:52.15	–	13:39:53.80	–
GRZ- $L_{v_i}(e-v)$	–	–	13:39:53.94	0.14
GRZ- $\bar{L}_{v_i}(e-v)$	–	–	13:39:53.94	0.14
OTT-ORB(23-08-2008)	00:16:53.33	–	00:16:54.16	–
OTT- $L_{v_i}(e-n)$	–	–	00:16:54.22	0.06
OTT- $\bar{L}_{v_i}(e-n)$	–	–	00:16:54.22	0.06
OTT- $L_{v_i}(e-v)$	00:16:53.27	0.06	00:16:54.22	0.06
OTT- $\bar{L}_{v_i}(e-v)$	00:16:53.27	0.06	00:16:54.22	0.06
OTT- $L_{v_i}(n-v)$	00:16:53.35	0.02	00:16:54.20	0.04
OTT- $\bar{L}_{v_i}(n-v)$	00:16:53.35	0.02	00:16:54.20	0.04
OT4-ORB	00:16:53.75	–	00:16:54.86	–
OT4- $L_{v_i}(e-n)$	–	–	00:16:55.06	0.20
OT4- $\bar{L}_{v_i}(e-n)$	–	–	00:16:55.06	0.20
OT4- $L_{v_i}(e-v)$	–	–	00:16:55.04	0.18
OT4- $\bar{L}_{v_i}(e-v)$	–	–	00:16:54.95	0.09
OT4- $L_{v_i}(n-v)$	00:16:53.70	0.05	00:16:55.01	0.15
OT4- $\bar{L}_{v_i}(n-v)$	00:16:53.72	0.03	00:16:55.01	0.15
OT5-ORB	00:16:53.88	–	–	–
OT5- $L_{v_i}(e-v)$	00:16:53.99	0.11	00:16:54.07	–
OT5- $\bar{L}_{v_i}(e-v)$	00:16:53.99	0.11	00:16:54.08	–
OT5- $L_{v_i}(n-v)$	00:16:53.99	0.11	00:16:54.09	–
OT5- $\bar{L}_{v_i}(n-v)$	00:16:53.99	0.11	00:16:54.105	–
GRZ-ORB	00:16:54.59	–	00:16:56.22	–
GRZ- $L_{v_i}(e-n)$	–	–	00:16:56.26	0.04
GRZ- $\bar{L}_{v_i}(e-n)$	–	–	00:16:56.26	0.04
GRZ- $L_{v_i}(n-v)$	00:16:54.19	0.4	00:16:56.258	0.038
GRZ- $\bar{L}_{v_i}(n-v)$	00:16:54.21	0.38	00:16:56.256	0.036

TABLE 6.3 – Résultats du spectre croisé de la TO sur les composantes [East-North],[East-Vertical] et [North-Vertical]-[OTT-OT4-OT5-GRZ]-Séismes du 12-08-2008 et du 23-08-2008

Station	Inter.-Comp.	Onde P	Δtp	Onde S	Δts
OTT-ORB	[1400,1600]	03:23:34.04	—	03:23:34.84	—
OTT- L_{v_i}	[1400,1600]-[e-n]	—	—	03:23:34.852	0.012
OTT- \bar{L}_{v_i}	[1400,1600]-[e-n]	—	—	03:23:34.852	0.012
OTT-ORB	[1600,1800]	03:27:24.68	—	03:27:25.49	—
OTT- L_{v_i}	[1600,1800]-[v-e]	—	—	03:27:25.497	0.007
OTT- \bar{L}_{v_i}	[1600,1800]-[v-e]	—	—	03:27:25.496	0.006
OTT-ORB	[3429,3432]	03:57:09.52	—	03:57:10.36	—
OTT- L_{v_i}	[3429,3432]-[v-n]	03 :57 :09.572	0.052	—	—
OTT- \bar{L}_{v_i}	[3429,3432]-[v-e]	—	—	03:57:10.366	0.006
OTT-ORB	[5200,5400]	04:29:58.08	—	04:29:58.90	—
OTT- L_{v_i}	[5200,5400]-[v-n]	04:29:58.1	0.02	04:29:58.953	0.053
OTT- \bar{L}_{v_i}	[5200,5400]-[v-n]	04:29:58.1	0.02	04:29:58.954	0.054
OTT-ORB	[5600,5800]	04:33:59.24	—	04:34:00.06	—
OTT- L_{v_i}	[5600,5800]-[v-e]	—	—	04:34:00.072006	0.012
OTT- \bar{L}_{v_i}	[5600,5800]-[v-e]	—	—	04:34:00.099998	0.04
OT5-ORB	[1400,1600]	03:23:34.59	—	03:23:35.80	—
OT5- L_{v_i}	[1400,1600]-[v-e]	—	—	03:23:35.866	0.066
OT5-ORB	[1573,1577]	03:26:13.74	—	03:26:14.94	—
OT5- L_{v_i}	[1573,1577]-[v-e]	03:26:13.768	0.028	03:26:15.18	0.024
OT5-ORB	[1600,1800]	03:27:25.25	—	03:27:26.52	—
OT5- L_{v_i}	[1600,1800]-[e-n]	—	—	03:27:26.716	0.166
OT5-ORB	[5600,5800]	04:33:59.80	—	04:34:01.05	—
OT5- L_{v_i}	[5600,5800]-[e-n]	—	—	04:34:01.156	0.106
GRZ-ORB	[1400,1600]	03:23:35.40	—	03:23:37.09	—
GRZ- L_{v_i}	[1400,1600]-[v-n]	—	—	03:23:37.12	0.03
GRZ-ORB	[1433,1437]	03:23:53.00	—	03:23:54.64	—
GRZ- L_{v_i}	[1433,1437]-[v-e]	03:23:53.156	0.156	03:23:54.75	0.11
GRZ-ORB	[1600,1800]	03:27:26.01	—	03:27:27.69	—
GRZ- L_{v_i}	[1600,1800]-[v-e]	—	—	03:27:27.766	0.076
GRZ-ORB	[5200,5400]	04:29:59.40	—	04:30:01.07	—
GRZ- L_{v_i}	[5200,5400]-[v-e]	04:29:59.436	0.036	—	—
GRZ- L_{v_i}	[5400,5600]-[v-e]	—	—	04:30:01.11	0.04

TABLE 6.4 – Résultats du spectre croisé de la TO-[OTT-OT5-GRZ]-
Enregistrement du 03-03-2009

OTT-OT5	Intervalle	t_i
East	[1400,1600]	03:23:34.894
Vertical	[1431,1437]	03:23:52.469
East	[3429,3432]	03:57:10.372
North	[5200,5400]	04:29:58.94
North	[5600,5800]	04:34:00.096
OTT-GRZ	Intervalle	t_i
Vertical	[1400,1600]	03:23:35.42
East	[1431,1437]	03:23:52.91
North	[1600,1800]	03:27:25.47
North	[3429,3432]	03:57:10.348
East	[5200,5400]	04:29:58.962
North	[5400,5600]	04:30:01.11
Vertical	[5600,5800]	04:34:00.2156
OT5-GRZ	Intervalle	t_i
North	[1400,1600]	03:23:37.15
Vertical	[1431,1437]	03:23:53.189
Vertical	[1600,1800]	03:27:26.053
Vertical	[3429,3432]	03:57:11.428
East	[5200,5400]	04:29:59.491
North	[5400,5600]	04:30:01.093
Vertical	[5600,5800]	04:34:00.58795

TABLE 6.5 – Résultats du spectre croisé de la TO entre les stations-[OTT-OT5-GRZ]-Enregistrement du 03-03-2009

GRZ-OTT	Intervalle	t_i
Vertical	[600,800]	03:10:54.841
OTT-OT5	Intervalle	t_i
Vertical	[1200,1400]	03:23:08.542
GRZ-OT5	Intervalle	t_i
Vertical	[2400,2600]	03:42:19.9279
Vertical	[2800,3000]	03:47:37.49
Vertical	[3200,3400]	03:54:12.235
GRZ-OTT	Intervalle	t_i
North	[3400,3600]	03:59:02.8612
North	[3400,3600]	03:59:02.86117
North	[3600,3800]	04:00:37.883
GRZ-OT5	Intervalle	t_i
Vertical	[4800,5000]	04:21:02.04
Vertical	[5000,5200]	04:25:55.4544

TABLE 6.6 – Résultats de la coïncidence des TO d'un événement non sismique entre les stations-[OTT-OT5-GRZ]-Enregistrement du 03-03-2009

GRZ-OT5	Intervalle	t_i
East	[1400,1600]	03:23:36.3384
OTT-OT5	Intervalle	t_i
East	[1400,1600]	03:23:35.8912
GRZ-OT5	Intervalle	t_i
North	[1400,1600]	03:23:36.3562
OTT-OT5	Intervalle	t_i
North	[1400,1600]	03:23:35.9841
GRZ-OT5	Intervalle	t_i
East	[1573,1577]	03:26:15.8755
OTT-OT5	Intervalle	t_i
East	[1573,1577]	03:26:14.96066
OTT-OT5	Intervalle	t_i
East	[5400,5600]	04:30:00.36912
East	[5600,5800]	04:34:00.71731
North	[5600,5800]	04:34:00.99530

TABLE 6.7 – Résultats de la coïncidence des TO entre deux stations-[OTT-OT5-GRZ]-Enregistrement du 03-03-2009

Composantes	Intervalle	t_i
Vertical	[1400,1600]	03:23:35.2394
North	[1433,1437]	03:23:54.2458
Vertical	[1433,1437]	03:23:54.611
North	[1573,1577]	03:26:15.4090
Vertical	[1573,1577]	03:26:14.6703
North	[1600,1800]	03:27:26.7150
Vertical	[3429,3432]	03:57:11.6773
East	[5200,5400]	04:29:59.32
North	[5200,5400]	04:29:59.2118
Vertical	[5200,5400]	04:29:58.7571
North	[5400,5600]	04:30:00.8452
Vertical	[5400,5600]	04:30:01.070
Vertical	[5600,5800]	04:34:00.62119

TABLE 6.8 – Résultats de la coïncidence des TO entre trois stations-[OTT-OT5-GRZ]-Enregistrement du 03-03-2009

Bibliographie

- [1] P. Alexandre. Les Séismes en Europe occidentale de 329 à 1249. Nouveau catalogue critique. *Publications de l'Observatoire Royal de Belgique, Série Géophysiques*, 12(3) :267–292, 1990.
- [2] P. Alexandre, D. Kusman, T. Petermans, and T. Camelbeeck. *The 18th september 1692 earthquake in Belgian Ardenne and its aftershocks-magnitude and epicentral intensity, Modern Approach in Historical Sismology*. Springer-Verlag, in press, 2007.
- [3] S.T. Ali, J-P. Antoine, and J-P. Gazeau. Continuous frames in Hilbert space. *Annals of Physics*, 222(1) :1–37, 1993.
- [4] S.T. Ali, J-P. Antoine, and J-P. Gazeau. *Coherent States, Wavelets, and Their Generalizations*. Springer-Verlag, New-York, 2000.
- [5] K.R. Anderson. Epicentral location using arrival time order. *Bulletin of Seismological Society of America*, 71 :541–545, 1981.
- [6] A. Ansel. Localiser un tremblement de terre, 2001. [http : //www.eost.u-strasbg.fr/pedago](http://www.eost.u-strasbg.fr/pedago).
- [7] J-P. Antoine. Wavelet analysis : A new tool in signal processing. *Physicalia Magazine*, 16 :17–42, 1994.
- [8] J-P. Antoine. Wavelet analysis of signals and images, A grand tour. *Revista Ciencias Matematicas*, 28 :1–33, 2000.
- [9] J-P. Antoine, D. Barache, R.M. Cesar, and L.F. Costa. Shape characterization with the wavelet transform. *Signal Processing*, 62(3) :265–290, 1997.
- [10] J-P. Antoine, R. Murenzi, P. Vandergheynst, and S.T. Ali. *Two-dimensional Wavelets and Their Relatives*. Cambridge University Press, Cambridge(UK), 2004.
- [11] J-P. Antoine and R. Prieels. Traitement du signal et théorie de l'information, 2002. Notes du cours PHYS2907, Année académique 2002/2003.

-
- [12] Y. Bentaleb. *Analyse par ondelettes des signaux sismiques : Applications aux ondes de surface*. PhD thesis, Université Mohamed V-Agdal, May 2007.
- [13] Y. Bentaleb and S. El Hajji. A method for the alignment of seismic waves by wavelet transform. In *Actes du congrès francophone RFMA05*, 2005.
- [14] B.A. Bolt. *Les tremblements de terre*. Bibliothèque pour la Science de la Diffusion, Berlin, 1978.
- [15] E. Borel and H. Lebesgue. Sur la correspondance de Borel et le théorème de Dirichlet. *Archives internationales d'histoire des sciences*, 39(7) :69–110, 1989.
- [16] T. Camelbeeck. Les données sismiques, 2008. [http : //www.seismologie.be](http://www.seismologie.be).
- [17] C. Cishahayo. L'analyse par ondelettes permet de détecter avec précision les temps d'arrivée des différents types d'ondes sismiques, 1995. Thèse annexe, Année académique 1994/1995.
- [18] A. Cohen, I. Daubechies, and J. Feauveau. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure Applied Mathematics*, 45(5) :485–560, 1992.
- [19] R.R. Coifman and Y. Meyer. Remarques sur l'analyse de Fourier à fenêtre. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 312(3) :259–261, 1991.
- [20] J.M. Combes, A. Grossmann, and P. Tchamitchian. Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space. In *Proceedings of the International Conference*, 1989.
- [21] V. Coron, L. Jacques, A. Rivoldini, and P. Vandergheynst. The Yawtb toolbox (Yet another wavelet toolbox), 2000. [http : //www.fyma.ucl.ac.be/projects/yawtb](http://www.fyma.ucl.ac.be/projects/yawtb).
- [22] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. Rutgers University and AT&T Bell Laboratories, 1992.
- [23] I. Daubechies, A. Grossmann, and Y. Meyer. Painless non-orthogonal expansion. *Journal of Mathematical Physics*, 27 :1271–1283, 1986.
- [24] E. Foufoula-Georgiou and P. Kumar. *Wavelets in Geophysics*. Academic Press, 1995.

-
- [25] P. Frick, R. Beck, E.M. Berkhuijsen, and I. Patrickeyev. Scaling and correlation analysis of galactic images. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 327 :1145–1157, 2001.
- [26] S. Goes, R. Govers, and P. Vacher. Shallow mantle temperatures under Europe from p and s wave tomography. *Publishing Company*, 11 :153–169, 2000.
- [27] A. Grinsted, J.C. Moore, and S. Jevrejeva. Application of the cross wavelet transform and wavelet coherence to geophysical time series. *Nonlinear Process in Geophysics*, 11 :561–566, 2004.
- [28] A. Grossmann, J. Morlet, and T. Paul. Transforms associated to square integrable group representation I. General results. *Journal of Mathematical Physics*, 27(4) :2473–2479, 1985.
- [29] A. Grossmann, J. Morlet, and T. Paul. Transforms associated to square integrable group representation II. Exemples. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 45 :293–298, 1986.
- [30] C. Heil and D.F. Walnut. *Fundamental Papers in Wavelet Theory*. Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2006.
- [31] M. Holschneider. *Wavelets : An Analysis tool*. Oxford University Press, UK, 1998.
- [32] M. Holschneider and P. Tchamitchian. Régularité locale de la fonction “non-différentiable” de Riemann. In *Les ondelettes en 1989*, pages 102–124. Lecture Notes in Mathematics, volume 1348, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [33] J. Huang, K. Higuchi, and A. Shabbar. The relationship between the North Atlantic Oscillation and El Nino-Southern Oscillation. *Geophysical Research Letters*, 25(14) :2707–2710, 1998.
- [34] B.B. Hubbard. *The World According to Wavelets : The Story of a Mathematical Technique in the Making*. A K Peters, Massachusetts, 1998.
- [35] L. Hudgins, C. Friebe, and M. Mayer. Wavelet transform and atmospheric turbulence. *Physical Review Letters*, 71(6) :3279–3282, 1993.
- [36] L. Jacques. *Ondelettes, repères et couronne solaire*. PhD thesis, Université Catholique de Louvain, Chemin du cyclotron 2, B-1348 Louvain-la-Neuve, juin 2004.
- [37] S. Jaffard. Pointwise smoothness, two-microlocalization and wavelet coefficients. *Publications mathématiques*, 35 :155–168, 1991.

-
- [38] J. Wang and T-L. Teng. Identification and picking of S-phase using an artificial neural network. *Bulletin of Seismological Society of America*, 87(5) :1140–1149, 1997.
- [39] N. Kryloff and N. Bogoliouboff. Le théorie générale de la mesure dans son application. *Annals of Mathematics*, 38(1) :65–113, 1937.
- [40] M.A. Kulesh, M.S. Diallo, and M. Holschneider. Wavelet Analysis of Ellipticity, Dispersion, and Dissipation Properties of Rayleigh waves. *Acoustical Physics*, 51 :425–434, 2005.
- [41] M.A. Kulesh, M.S. Diallo, M. Holschneider, Q. Xie, and F. Scherbaum. Modeling of Wave Dispersion using Continuous Wavelet Transform. *Pure Applied Geophysics*, 162(13) :843–855, 2005.
- [42] M. Kunt. *Traitement numérique des signaux*. Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1984.
- [43] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, San Diego, California, 1999.
- [44] S. Mallat and W.L. Hwang. Singularity detection and processing with wavelets. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(2) :617–643, 1992.
- [45] D. Maraun and J. Kurths. Cross wavelet analysis : significance testing and pitfalls. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 11(4) :505–514, 2004.
- [46] D. Maraun, J. Kurths, and M. Holschneider. Nonstationary Gaussian process in wavelet domain : Synthesis, estimation, and significance testing. *Physical Review E*, 75(016707) :1–14, 2007.
- [47] C. Melville, A. Levret, P. Alexandre, J. Lambert, and J. Vogt. Historical sismicity of the Strait of Dover-Pas de Calais. *Terra nova*, 8 :626–647, 1996.
- [48] Y. Meyer. *Ondelettes et opérateurs I : Ondelettes*. Hermann, Paris, 1990.
- [49] Y. Meyer. *Ondelettes, Algorithmes et Applications*. Armand Colin, Paris, 1992.
- [50] B.Ph. Van Milligen, E. Sanchez, T. Estrada, C. Hidalgo, B. Branas, B. Carreras, and L. Garcia. Wavelet bicoherence : a new turbulence analysis tool. *Physics of Plasmas*, 2(8) :227–262, 1995.
- [51] J.F. Muzy, E. Bacry, and A. Arneodo. Multifractal formalism for fractal signals ; the structure-function approach versus the wavelet-

- transform modulus-maxima method. *Physical Review E*, 47(9) :875–884, 1993.
- [52] M.Q. Nguyen. *Analyse multi-dimensionnelle et analyse par ondelettes des signaux sismiques*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, Mars 2000.
- [53] G. Nolet and D. Reidel. *Seismology and Exploration Geophysics*. D.Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1987.
- [54] D. Percival and A. Walden. *Wavelet Methods for Time Series*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.
- [55] C. Piromallo and A. Morelli. Imaging the Mediterranean upper mantle by *P*-wave travel time tomography. *Annali di Geofisica*, XL :963–979, 1997.
- [56] D. Pozo-Vazquez, M.J. Esteban-Parra, F.S. Rodrigo, and Y. Castro-Diez. The association between ENSO and winter atmospheric circulation and temperature in the North Atlantic region. *American Meteorological Society*, 14 :3408–3420, 2001.
- [57] M. Priestly. *Spectral Analysis and Time Series*. Academic Press, New-York, 1992.
- [58] A. Roueff. *Traitements des signaux sismiques multicapteurs et multicomposantes, utilisant les représentations temps-fréquence*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, July 2003.
- [59] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann, Paris, 1998.
- [60] R. Sleeman and T. van Eck. Robust automatic *P*-phase picking : an on-line implementation in the analysis of broadband seismogram recordings. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 113(4) :265–275, 1987.
- [61] C.H. Thurber. Nonlinear earthquake location : Theory and exemples. *Bulletin of Seismological Society of America*, 75(3) :779–790, 1985.
- [62] C. Torrence and G. Compo. A practical guide to wavelet analysis. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 79(1) :61–78, 1998.
- [63] B. Torresani. *Analyse continue par ondelettes*. Savoirs actuels, InterEdition/CNRS edition, Paris, 1995.
- [64] M. van Camp and T. Camelbeeck. Histoire des stations sismiques belges. De la station Solvay au réseau national de surveillance sismique. *Ciel et Terre*, 120 :162–176, 2004.

- [65] M. Withers, R. Aster, C. Young, J. Beiriger, and M.Harris. A comparison of select trigger algorithms for automated global seismic phase and event detection. *Bulletin of Seismological Society of America*, 88(1) :95–106, 1998.
- [66] J. Wroblewski. A model for spring bloom in the North Atlantic and its impact on ocean optics. *Limnology and Oceanography*, 34 :1563–1571, 1989.