

MATHEMATIQUE & PEDAGOGIE

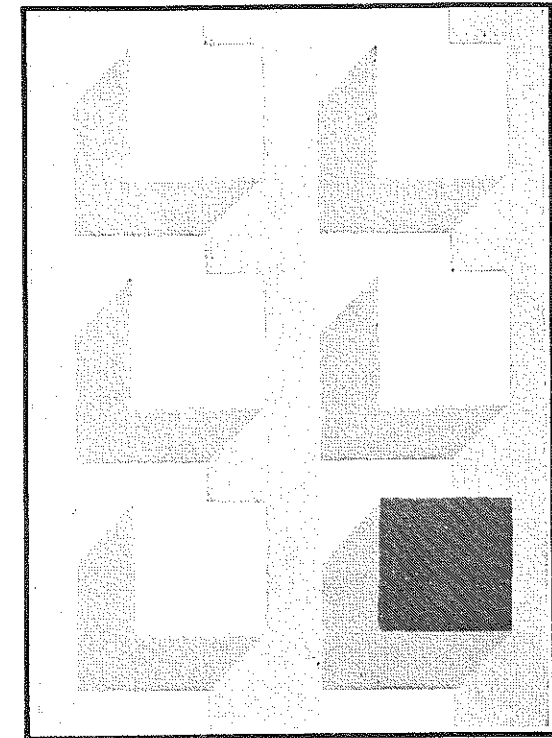
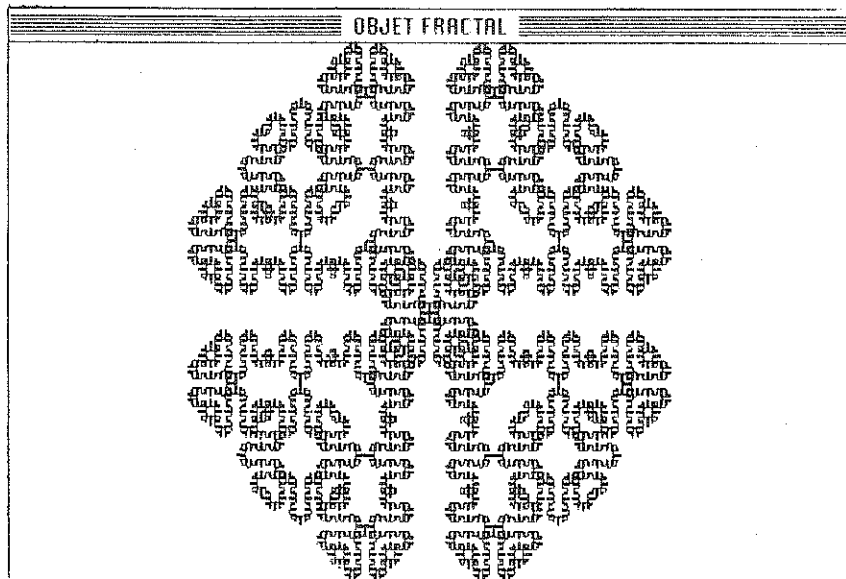
LA GEOMETRIE FRACTALE MODELES ET ENJEUX MAJEURS

(2e partie)

Jean Vanderdonckt

*2de Licence en sciences mathématiques,
Unité d'analyse numérique
Facultés N.D. de la Paix, Namur*

III. Objets fractals et Modèles

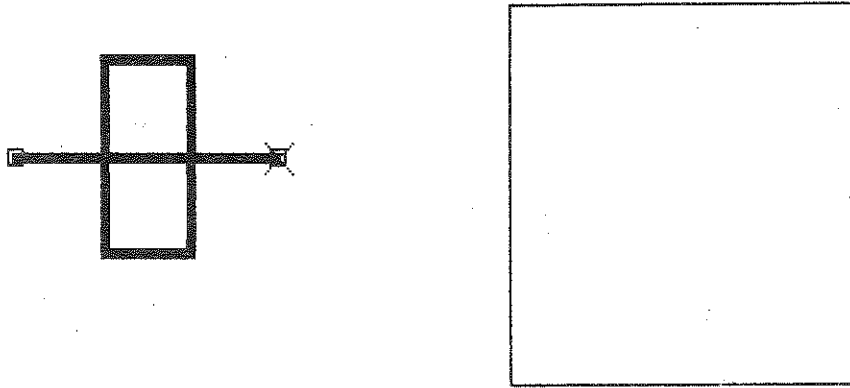


Revue bimestrielle éditée par la Société
Belge des Professeurs de Mathématique
d'expression française

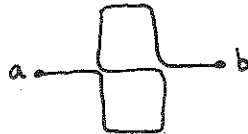
36, rue J.B. Vandercammen
B - 1160 Bruxelles

a) La Courbe de Peano

La courbe originale de Peano se trouve illustrée page 51 du n° 60 de M et P. Les courbes dites de Peano sont celles qui ont joué un rôle important dans l'élaboration du concept de dimension fractale. Voyons sa construction. Comme d'habitude, la première approximation est constituée d'un seul segment de longueur unité. La seconde approximation se base sur le générateur suivant que l'on applique aux quatre côtés respectifs du carré :

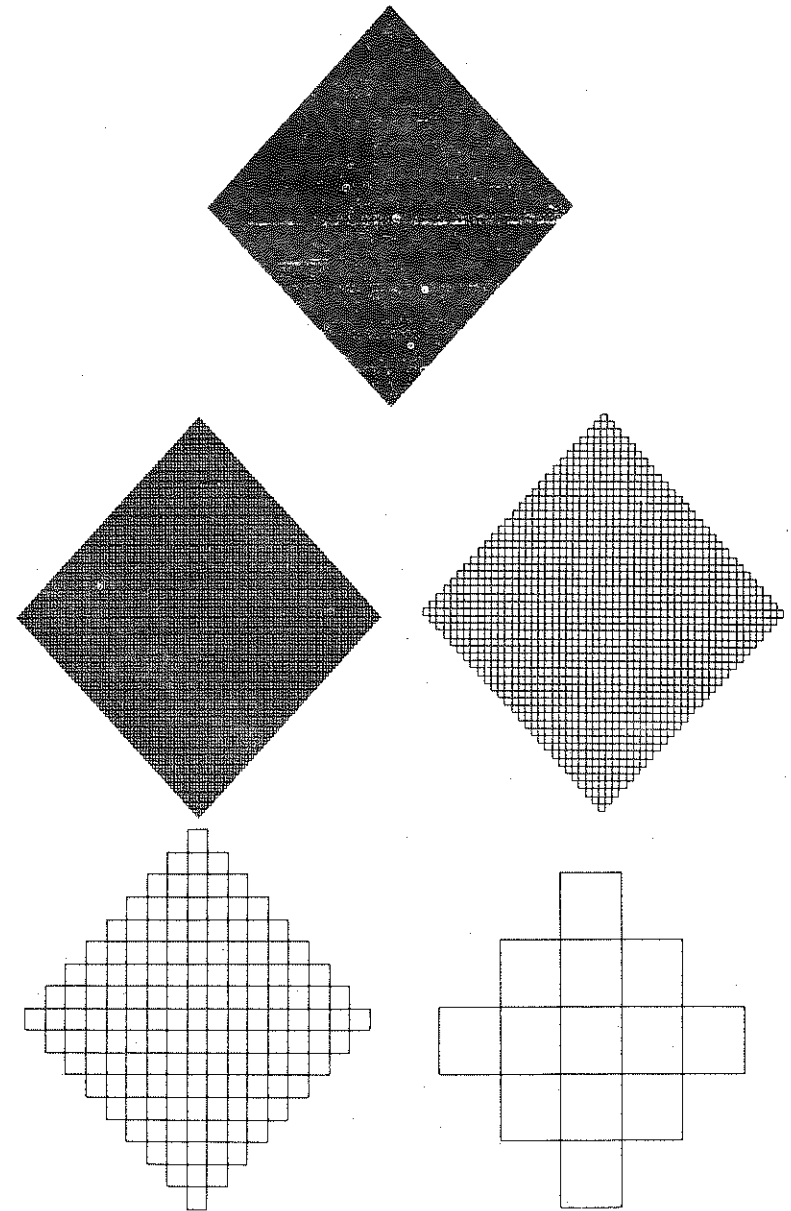


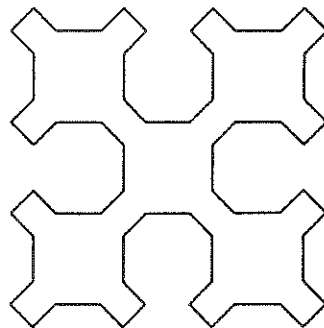
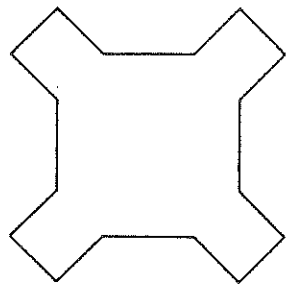
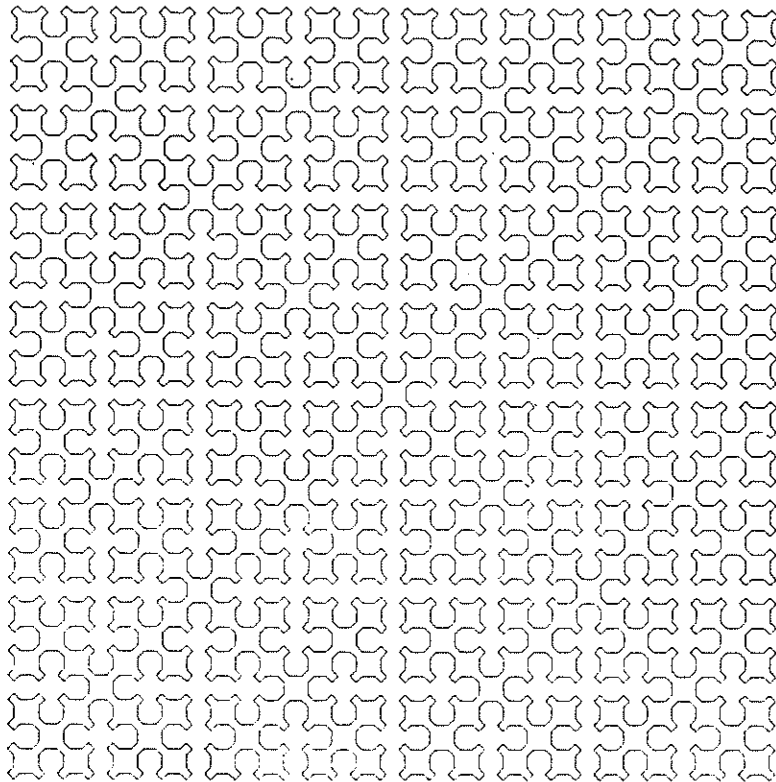
En fait, le générateur peut se redessiner comme suit :



On voit ainsi mieux le trajet parcouru entre a et b. Ce générateur donne lieu aux résultats ci-contre; de même, la courbe obtenue avec le premier générateur de Peano se trouve illustrée à la page suivante. On s'aperçoit que de complexité en complexité, la courbe de Peano devient de plus en plus dense pour remplir un carré de surface double au carré initial. En fait, c'est la courbe limite, aussi appelée "Ile de Peano" qui remplit tout le carré en étant de longueur infinie, en délimitant une surface finie et en ne repassant par tous les points du carré qu'une et une seule fois !

Déjà, en complexité $c = 6$, on a l'impression que la courbe remplit tout le carré, ceci est dû à la saturation de l'écran de l'ordinateur dont la résolution graphique se voit dépassée !





Propriété 1 : la Courbe de Peano passe par chaque point du carré

- ▼ (preuve topologique raccourcie)
Le générateur de la courbe est une courbe continue
 \Rightarrow l'objet fractal ainsi déterminé est continu sur $[0,1]$, intervalle compact
 \Rightarrow son image est aussi un compact
 [car l'image d'un compact par une fonction continue est un compact]
 Or, son image contient un sous-ensemble dense du carré
 \Rightarrow L'image contient le carré entier



Propriété 2 : la Courbe de Peano est de dimension 2

- ▼ L'image de la courbe contient le carré entier (par Prop. 1)



la dimension fractale (aussi bien que topologique) vaut 2 : $D = D_T = 2$
 puisqu'elle peut par homothétie interne recouvrir le plan.

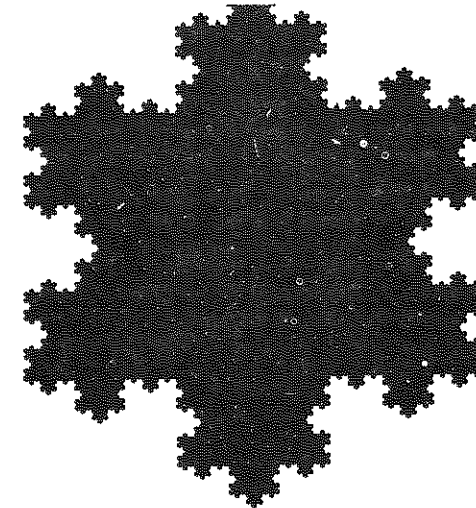


b) La Courbe de Von Koch

Cette courbe (illustrée page 54, n° 60) est de dimension fractale

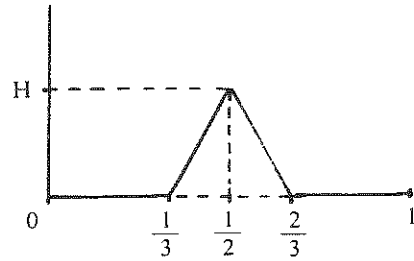
$$D = \frac{\log 4}{\log 3} \simeq 1,2619$$

Avec cette courbe, on peut obtenir bien des variations; si, sur les trois côtés d'un triangle équilatéral, on dessine cette courbe en orientant les triangles vers l'intérieur, on obtient les schémas de la page 62, en les orientant vers l'extérieur, on obtient le très joli flocon de Von Koch suivant



Schématiquement, le dessin est le suivant :

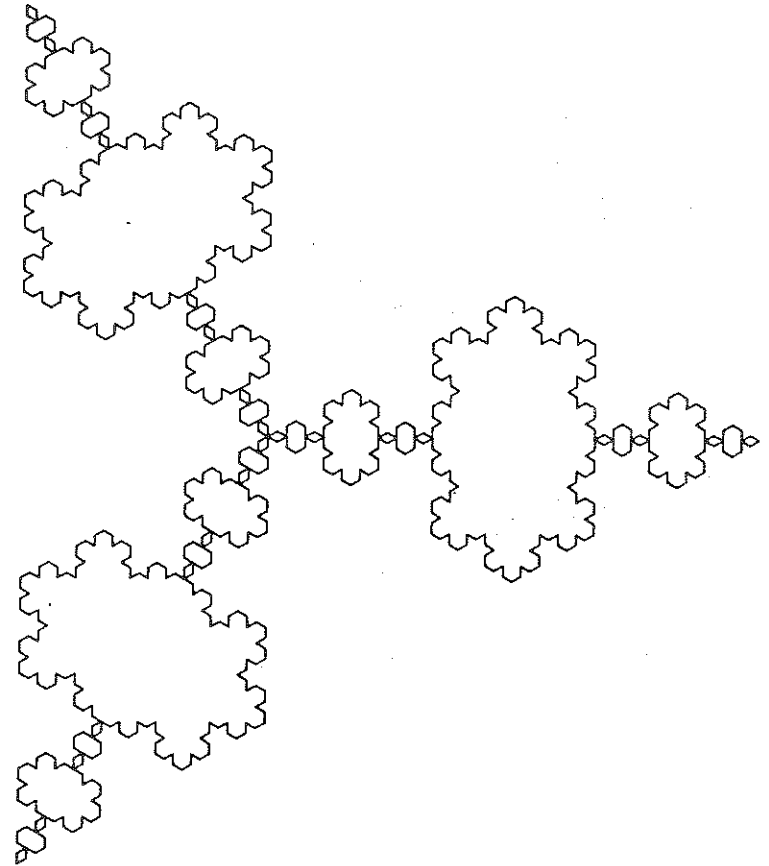
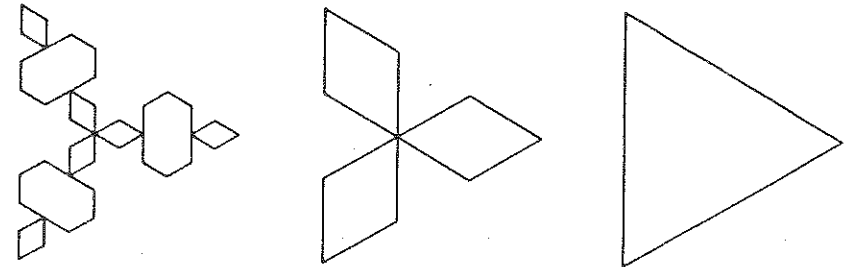
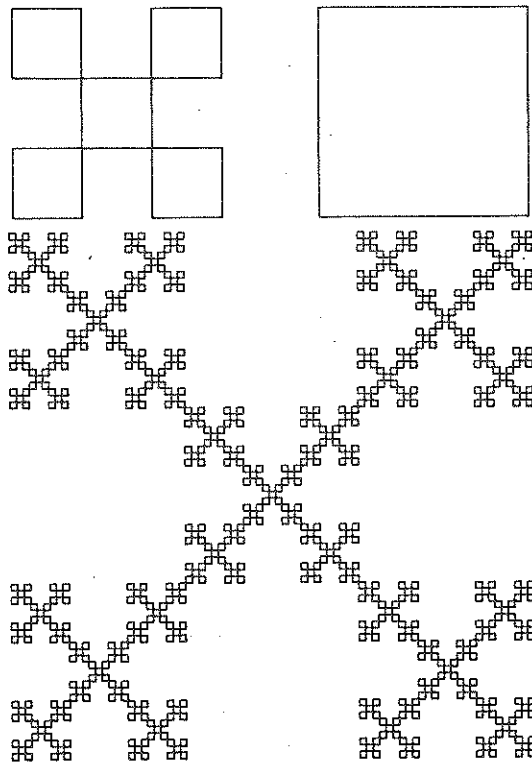
$$\text{la hauteur est } H = \frac{\text{tg } 60^\circ}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$



Exemple d'objet fractal créé avec



$$5 \text{ segments de longueur } \frac{1}{3} \Rightarrow D = \frac{\log 5}{\log 3} \approx 1,4650$$



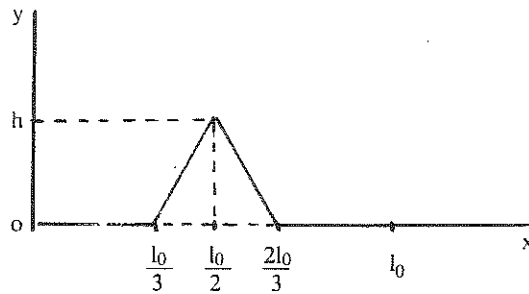
Propriété de la Courbe de Von Koch : elle est infinipérimétrique en délimitant une surface finie

Preuve (analytique)

▼ Désignons par l_0 = la longueur du segment générateur ($0 < l_0 < +\infty$)
soient l = longueur d'un côté du triangle équilatéral généré
 s = surface de ce triangle
 l = longueur totale de la courbe
 S = surface située en dessous de cette courbe

• en complexité nulle : $c=0$, on choisit $l = l_0$, longueur initiale; on a $S=0$

• en complexité unité : $c=1$, on a tracé un triangle de côté $\frac{l_0}{3}$ centré sur $[0, l_0]$



Afin de déterminer la surface des triangles à chaque étape, servons-nous de la formule de Héron d'Alexandrie : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

où p = demi-périmètre, a, b, c = longueurs des côtés

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

puisque $l = a = b = c = l_0/3$, on obtient : $p = \frac{3}{2} \cdot \frac{l_0}{3} = \frac{l_0}{2}$

$$S_0 = \sqrt{\frac{l_0}{2} \left(\frac{l_0}{2} - \frac{l_0}{3}\right)^3}$$

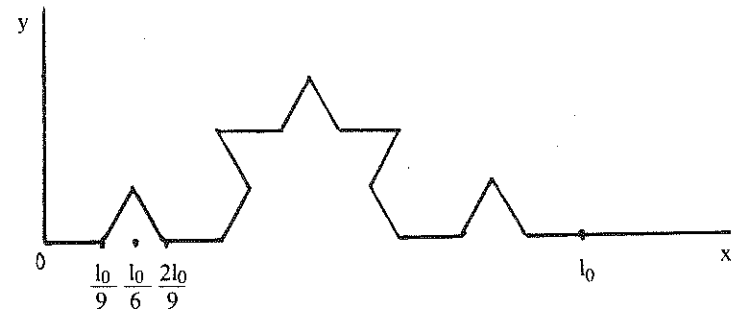
$$= \frac{l_0^2}{12\sqrt{3}}$$

$$L_1 = \frac{4}{3} l_0$$

Remarque : l'ordonnée h (hauteur) du sommet est déterminée par Pythagore :

$$h = \sqrt{\left(\frac{l_0}{3}\right)^2 - \left(\frac{l_0}{2} - \frac{l_0}{3}\right)^2} = \frac{l_0}{3\sqrt{2}}$$

• en complexité $c=2$, on a le dessin :



A cette étape, la longueur d'un côté d'un triangle de la deuxième génération vaut :

$$l = \frac{l_0}{9},$$

$$\text{d'où } p = \frac{3}{2} l = \frac{3}{2} \cdot \frac{l_0}{9} = \frac{l_0}{6}$$

et sa surface vaut :

$$s = \sqrt{\frac{l_0}{6} \left(\frac{l_0}{6} - \frac{l_0}{9}\right)^3} = \frac{l_0^2}{108\sqrt{3}};$$

en adjoignant les surfaces des 4 nouveaux triangles, on obtient

$$S_1 = S_0 + \frac{4l_0^2}{108\sqrt{3}} = \frac{l_0^2}{12\sqrt{3}} + \frac{l_0^2}{27\sqrt{3}} = \frac{l_0^2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{27}\right)$$

$$L_1 = \frac{16}{9} l_0$$

En généralisant le processus au niveau de complexité n :

la longueur d'un côté d'un triangle de la n ème génération est : $l = \frac{1}{3^n} l_0 = 3^{-n} \cdot l_0$

son demi-périmètre est : $p = \frac{1}{2} \cdot 3^{-n} \cdot l_0 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{l_0}{3^{n-1}}$

$$\begin{aligned}
 \text{sa surface devient : } s &= \sqrt{p(p-1)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{l_0}{3^{n-1}} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l_0}{3^{n-1}} - \frac{l_0}{3^n} \right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{l_0}{3^{n-1}} \right)^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)^2} = \frac{l_0^2}{12\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{(3^{n-1})^2}
 \end{aligned}$$

Comme à l'étape n, on a généré 2²⁽ⁿ⁻¹⁾ nouveaux triangles,

$$\text{la surface ajoutée est de } s_n = \frac{l_0^2}{12\sqrt{3}} \cdot \frac{2^{2(n-1)}}{(3^{n-1})^2}$$

Par conséquent la surface générale vaut :

$$S_n = \sum_{k=1}^n s_k = \frac{l_0^2}{12\sqrt{3}} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{2^{2(k-1)}}{(3^{k-1})^2}$$

Le terme de la série numérique se simplifie :

$$\frac{2^{2(k-1)}}{(3^{k-1})^2} = \left(\frac{2}{3} \right)^{2(k-1)}$$

et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^{2(k-1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{9} \right)^{(k-1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{9} \right)^k$$

C'est une progression géométrique convergente car $|\frac{4}{9}| < 1$; sa raison est $r = \frac{4}{9}$

$$\text{et son premier terme est 1, d'où } \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{9} \right)^k = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5}$$

$$\text{Dès lors, la surface totale est } S = \frac{l_0^2}{12\sqrt{3}} \cdot \frac{9}{5} = \frac{\sqrt{3} l_0^2}{20} < +\infty$$

Ainsi, la surface totale est bien finie, mais la longueur de la courbe à la n^e étape est

$$L_n = \left(\frac{4}{3} \right)^n$$

et tend vers l'infini lorsque $n \rightarrow +\infty$.

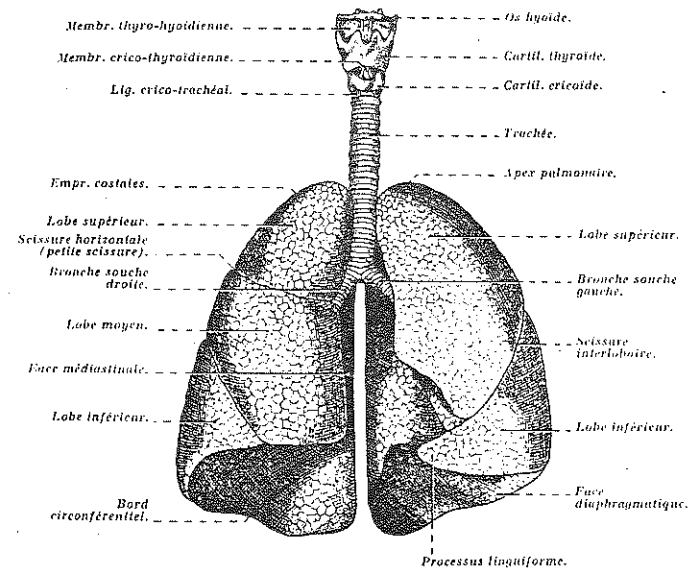
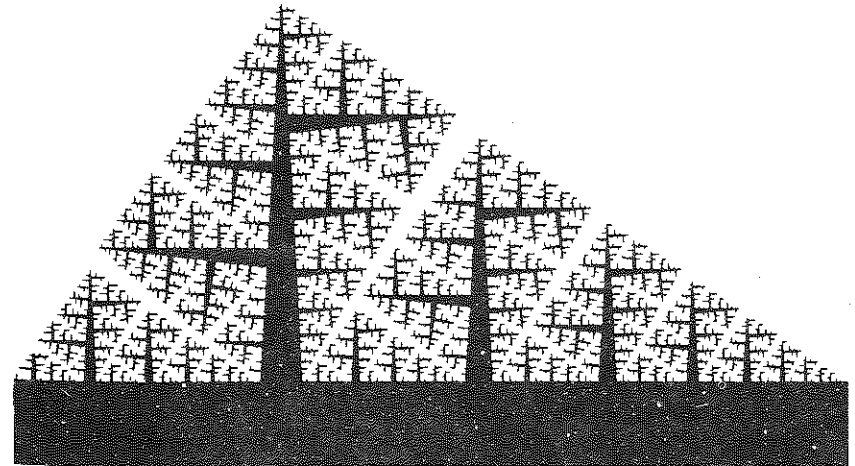
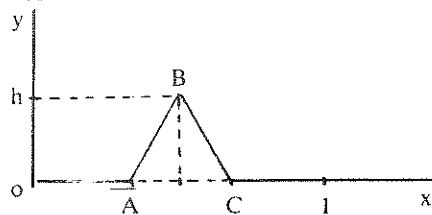


FIG. 610. — Larynx, trachée et poumons, vue antérieure.

c) le schéma alvéolaire du poumon : modèle fractal

Le schéma de construction de Von Koch était le suivant



$$A = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

$$B = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$C = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$$

En changeant les valeurs de ces paramètres, on peut choisir comme générateur d'autres triangles isocèles ou non, centrés sur l'intervalle $[0,1]$ ou non.

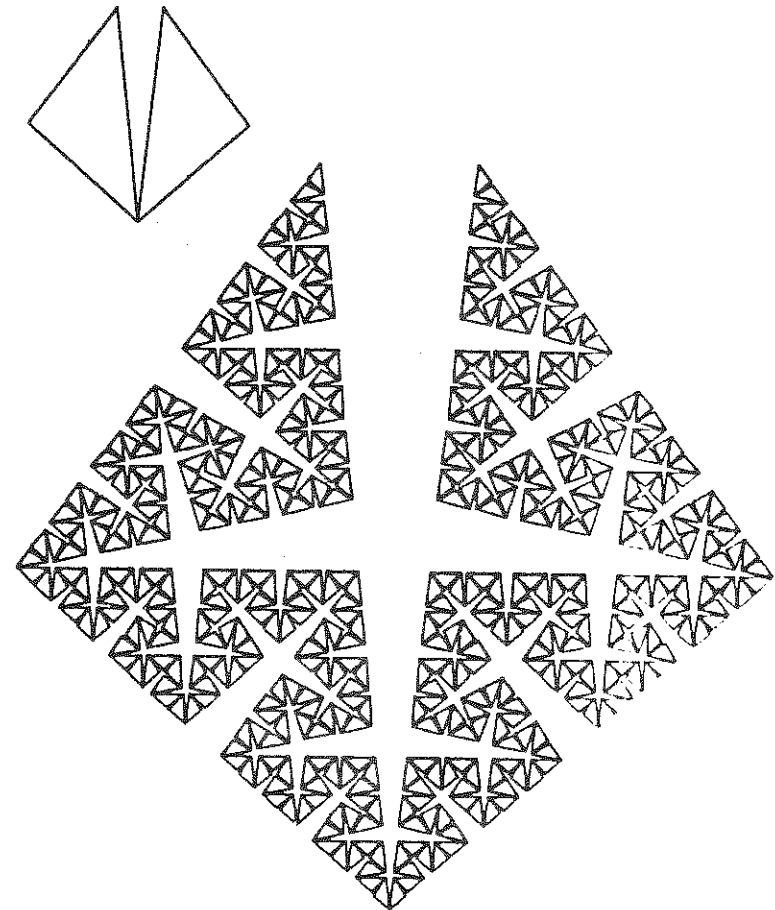
Lorsque les différents rapports des homothéties changent, il peut en résulter une dimension fractale supérieure à 1, ce qui est le cas de la figure ci-contre où :

$$D \simeq 1.8797$$

Si l'on décide de choisir $A = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$, $C = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$, $B = \left(\frac{1}{2}; 0.46\right)$, on obtient

une variante de la construction de Von Koch qui peut être interprétée comme la coupe d'un poumon humain. En fait, on dessine 2 courbes juxtaposées, chacune formant un lobe du poumon. En outre, ce modèle ressemble au schéma alvéolaire du poumon mais ce modèle n'est pas parfait puisque le poumon droit est trilobique tandis que le gauche n'est que bilobique (ie à 2 lobes comme sur le diagramme).

De plus, il s'avère, que selon ce modèle, notre poumon est un objet fractal de dimension $D \simeq 1.9$ mais de complexité bien supérieure à celle du dessin ci-dessus mais le modèle reste tout de même avantageux pour montrer que la Nature, en multipliant les circonvolutions pour un volume donné a essayé de maximiser la surface utilisable pour y faire le lien intime entre le corps et l'air inspiré destiné à purifier le sang.



BIBLIOGRAPHIE

voir p. 63 du n° 60 de Mathématique et Pédagogie

Adresse de l'auteur :

J. Vanderdonckt

Département de Mathématique

Facultés N-D de la Paix

8. Rempart de la Vierge

5000 Namur