

Chapitre 2

Surfaces et maillages

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons divers types de données surfaciques 3D, leur mode d'acquisition privilégié, et leur modélisation. Nous traitons ensuite spécifiquement des surfaces triangulées dont nous rappelons quelques propriétés topologiques, et nous présentons les principaux outils pour la génération d'une telle connexité à partir d'échantillons bruts. Ensuite, nous expliquons comment coder efficacement en mémoire des relations complexes d'adjacence de facettes. Nous donnons aussi une liste d'attributs souvent attachés à la géométrie (sommets ou facettes), généralement résultats d'une mesure physique. Nous terminons en précisant comment on peut comparer deux structures géométriques surfaciques maillées.

2.2 Principaux types de données surfaciques

Fondamentalement, il existe deux types de données surfaciques 3D : celles qui sont acquises par numérisation, et celles qui sont créées par assemblage de surfaces paramétrées (comme en CAO). Le premier type est souvent issu de mesures laser, de calculs de stéréovision, de mesures radiologiques médicales, suivis de traitement d'image. Le second peut résulter d'assemblage logique ou géométrique de volumes élémentaires dont on prend les enveloppes, ou de portions de surfaces analytiques juxtaposées. Cette seconde représentation provient soit de traitements élaborés accomplis sur le premier type de données, soit de données purement synthétiques. Pour l'un comme pour l'autre de ces types de représentation, un besoin commun d'affichage rapide s'est vite fait sentir. Ce besoin a trouvé une solution aujourd'hui universellement adoptée par les cartes graphiques à base de remplissage de triangles. Pour cette raison, la représentation des surfaces par des triangulations a progressivement acquis une grande popularité que ce soit pour représenter des nuages de points ou des surfaces structurées.

2.2.1 Nuage de points

L'acquisition de données surfaciques est pratiquée dans des domaines aussi variés que la cartographie, la muséologie, le cinéma ou la médecine. On utilise des outils d'acquisition

comme un scanner laser, plusieurs vues stéréoscopiques ou un tomographe à rayons X. Le résultat est une collection de mesures de grandeurs physiques en une multitude de points dont la machine fournit aussi les coordonnées cartésiennes. Lorsque le processus d'acquisition est terminé, l'appareil renvoie donc les coordonnées de N points et le résultat de la mesure physique en ce point (couleur, réflectance, chaleur, etc.) Ces points ne sont pas connectés entre eux. Ils sont l'image d'une certaine géométrie, mais la connexité est encore indéterminée ou implicite si l'acquisition se fait sur un échantillonnage régulier. Il appartiendra à un mailleur de s'acquitter de ce travail.

Nous présentons un exemple de nuage de points (voir Fig. 2.1). Il s'agit de mesures aériennes en vue de cartographier le milieu péri-urbain. Le dispositif d'acquisition est constitué d'un avion balayant aussi régulièrement que possible le sol à l'aide d'un laser. En mesurant le temps que met le rayon pour revenir après réflexion sur le sol, on assigne une altitude à la mesure. Ici, l'application vise à cartographier en 3D la ville de Bruxelles afin d'en construire un modèle numérique.

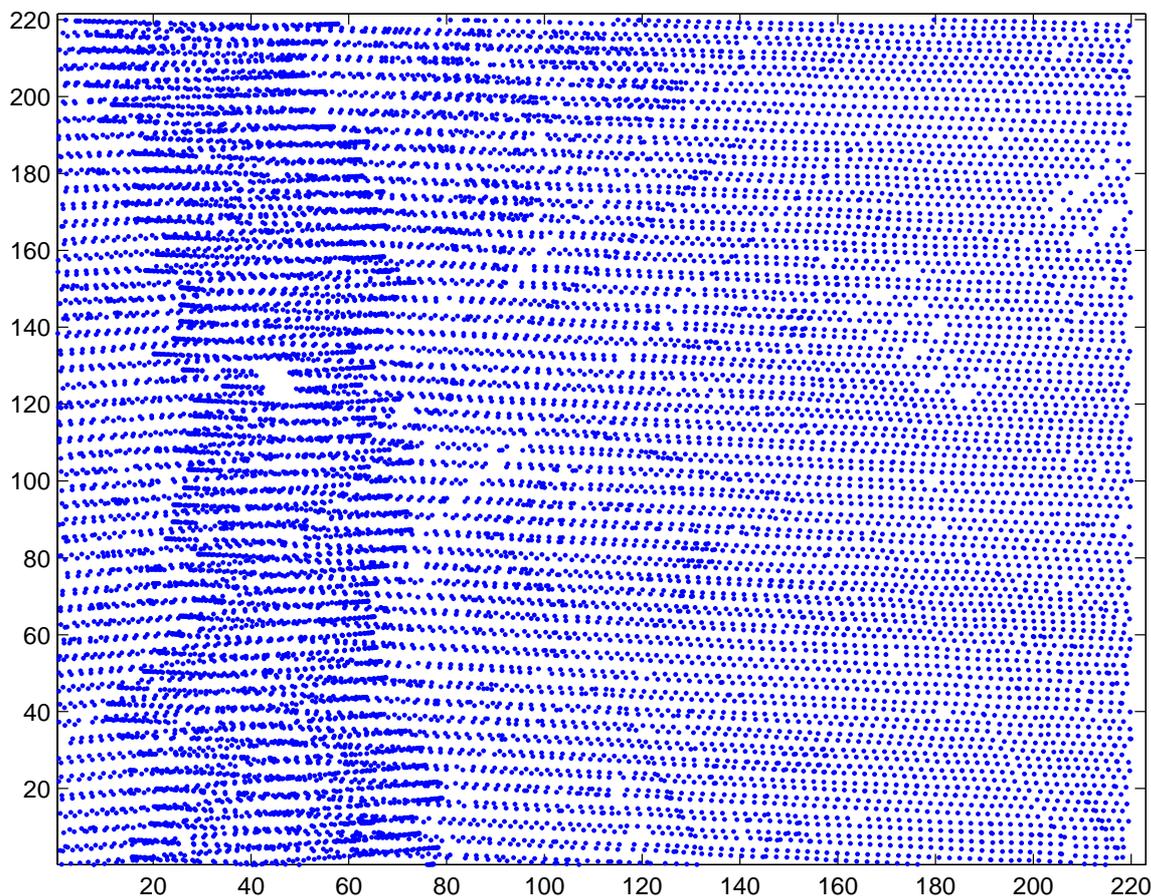


FIG. 2.1 – Surface d'une ville vue du ciel. En chaque point on connaît l'altitude du sol ou du bâtiment. La bande verticale sur la gauche contenant beaucoup plus de points qu'ailleurs correspond à un recouvrement du balayage aérien. Données : Copyright ©EuroSense.

Dans les représentations par nuages de points, la géométrie est fixée par le mode de

balayage. Pour un certain nombre d'objets tout d'abord, cette géométrie est très irrégulière. C'est le cas de surfaces résultant de la détection de points par traitement d'un volume de données (détection de discontinuités par exemple) ou d'appariement stéréographique. Dans de nombreux cas, les données sont plus structurées car elles résultent de mesures prises selon un échantillonnage régulier, ce qui leur confère des propriétés d'ordre dans l'espace. Malheureusement, l'échantillonnage est régulier dans un repère lié au capteur et non à l'objet, et lorsqu'on se place dans un référentiel lié à l'objet l'ordonnement des points est remis en cause et par suite la notion de surface s'appuyant sur ces points. Un grand nombre de travaux de ces récentes années a été consacré à retrouver une continuité de la surface de l'objet à partir de ces mesures éparses.

2.2.2 Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS)

Dans l'industrie mécanique, on produit deux sortes de surfaces : les surfaces fonctionnelles, qui permettent au produit de remplir sa fonction, et les surfaces libres, souvent pour des raisons esthétiques. C'est la raison pour laquelle on utilise en CAO des surfaces paramétrées dont on peut garantir qu'elles respectent les contraintes fortes liées aux surfaces fonctionnelles, et qu'elles disposent néanmoins de toute la souplesse nécessaire à la création de surfaces libres. Ces surfaces sont généralement paramétrées par un système de points de contrôle et de pondération.

La construction de surfaces par NURBS utilise des B-Splines monodimensionnelles. Nous rappelons comment les calculer récursivement. Soit $U = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ un ensemble ordonné de valeurs non décroissantes (i.e : $t_i \leq t_{i+1}$), et $N_{i,k}$ une famille de B-Splines normalisées. L'initialisation de la récurrence se formule par :

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \leq u < t_{i+1} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.1)$$

La récurrence suivante permet de calculer des B-Splines de degré quelconque :

$$N_{i,k}(u) = \frac{u - t_i}{t_{i+k} - t_i} \times N_{i,k-1}(u) + \frac{t_{i+k+1} - u}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} \times N_{i+1,k-1}(u). \quad (2.2)$$

Enfin, on demande à un vecteur w de poids et un ensemble P de points de contrôle de paramétrer la combinaison de B-Splines monodimensionnelles d'ordres k et l pour obtenir une surface. La surface NURBS obtenue est donnée par :

$$S_{NURBS}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{i,j} \times R_{i,k,j,l}(u, v), \quad (2.3)$$

où :

$$R_{i,k,j,l}(u, v) = \frac{w_{i,j} \times N_{i,k}(u) \times N_{j,l}(v)}{\sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^m w_{r,s} \times N_{r,k}(u) \times N_{s,l}(v)}. \quad (2.4)$$

Ainsi, créer une surface respectant des surfaces fonctionnelles devient un problème de positionnement de points de contrôles et la mise au point d'un système de poids. En outre, les surfaces produites ont de bonnes propriétés de dérivabilité. De plus, l'expression paramétrique de la surface permet un échantillonnage rapide en vue de l'affichage.

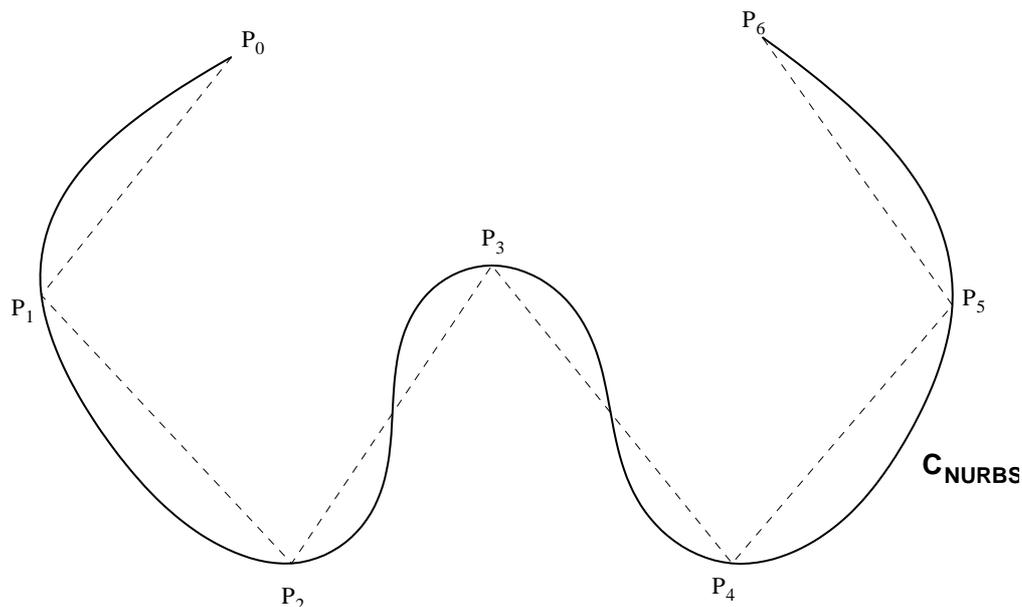


FIG. 2.2 – Exemple de courbe obtenue par combinaison de splines monodimensionnelles (les points de contrôle appartiennent à la courbe dans cet exemple de splines d’interpolation, mais nous aurions pu choisir des splines d’approximation qui ne passent pas par les points de contrôle).

2.2.3 Maillages surfaciques

Les cartes graphiques 3D ont été conçues pour accélérer l’affichage des triangles. On sait déjà échantillonner (au moins dans l’espace paramétrique) les surfaces issues de NURBS pour en faire un nuage de points, et nous montrerons dans la partie suivante comment relier entre eux les points d’un nuage. Pour ces raisons, décrire en machine une surface par un maillage s’est rapidement imposé comme une étape intermédiaire. Cela est encore plus vrai dès lors que les cartes graphiques modernes proposent un pipe-line câblé et programmable par l’utilisateur pour créer des effets personnalisés en un point ou sur une facette. En outre, à l’heure de la grande mise en réseau, les maillages présentent l’intéressant avantage de pouvoir se transmettre de manière hiérarchique. Un maillage surfacique est donc constitué d’un nuage de points et d’un ensemble d’arêtes les reliant entre eux. On ne se donne pas d’hypothèse sur la nature des facettes. Toutefois, tout polygone pouvant être triangulé, on choisit au début de câbler uniquement l’accélération de l’affichage des triangles. Dans la suite, nous commettrons l’abus de confondre maillage surfacique et surface triangulée.

2.3 Surfaces triangulées

Une surface triangulée constituée de N sommets peut être vue comme un signal $\mathcal{S} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$ avec $\mathcal{V} = \{p_i\}$ (avec $p_i \in \mathbb{R}^3 \forall i \in \{1, \dots, N\}$), $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}^2$ et $|\mathcal{V}| = N$ ($|\mathcal{V}|$ représente le cardinal de \mathcal{V}). L’ensemble \mathcal{V} code les coordonnées des points du maillage, et représente sa *géométrie*. L’ensemble \mathcal{E} est constitué de toutes les paires de points codant les arêtes de

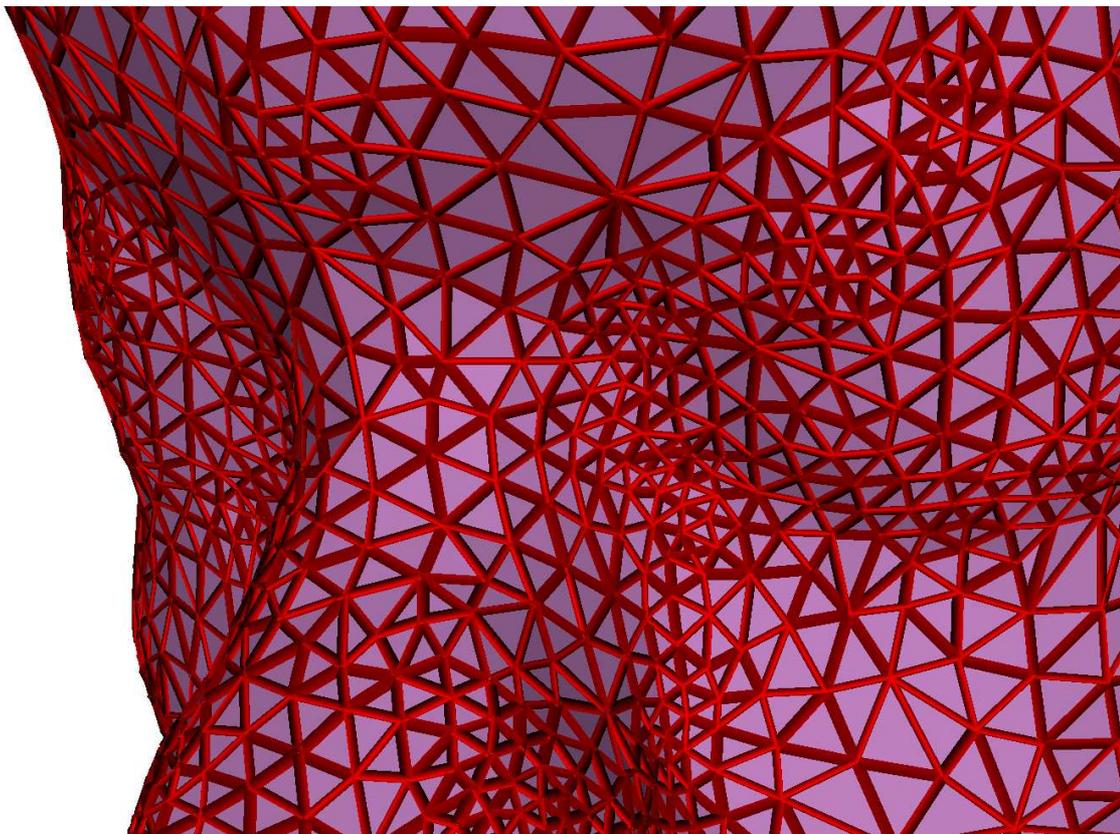


FIG. 2.3 – Zoom sur un maillage muséologique. Données : Télécom Paris.

l'objet et représente la *connexité* de l'objet, et on appelle a le nombre d'arêtes du maillage. On dit que la géométrie \mathcal{V} est définie sur la connexité \mathcal{E} de l'objet 3D. La connexité établit des relations entre les points : on pourra aussi considérer le *graphe* de la connexité se déduisant de \mathcal{E} par recherche de cycles. De ce graphe découlent les facettes du maillage, dont le nombre est noté f . Pour nous, toutes les facettes seront des triangles. Nous illustrons notre propos sur la Fig. 2.4, où nous mettons en perspective une grille d'échantillonnage régulière avec une grille irrégulière. Pour la suite, il est utile de définir le voisinage p^* d'un point $p \in \mathcal{V}$:

$$\forall p' \in \mathcal{V}, p' \in p^* \iff \{p, p'\} \in \mathcal{E}. \quad (2.5)$$

Par convention, on choisit de ne pas inclure un point dans son voisinage : $p \notin p^*$. On appelle *degré* d_p , ou encore *valence*, d'un point p le cardinal de son voisinage : $d_p = |p^*|$. C'est le nombre d'arêtes incidentes en p .

2.3.1 Propriétés topologiques

De cette information de connexité découle la topologie du maillage considéré. À une surface triangulée, on associe généralement sa caractéristique d'Euler-Poincaré, notée $\chi(\mathcal{S})$:

$$\chi(\mathcal{S}) = N - a + f. \quad (2.6)$$

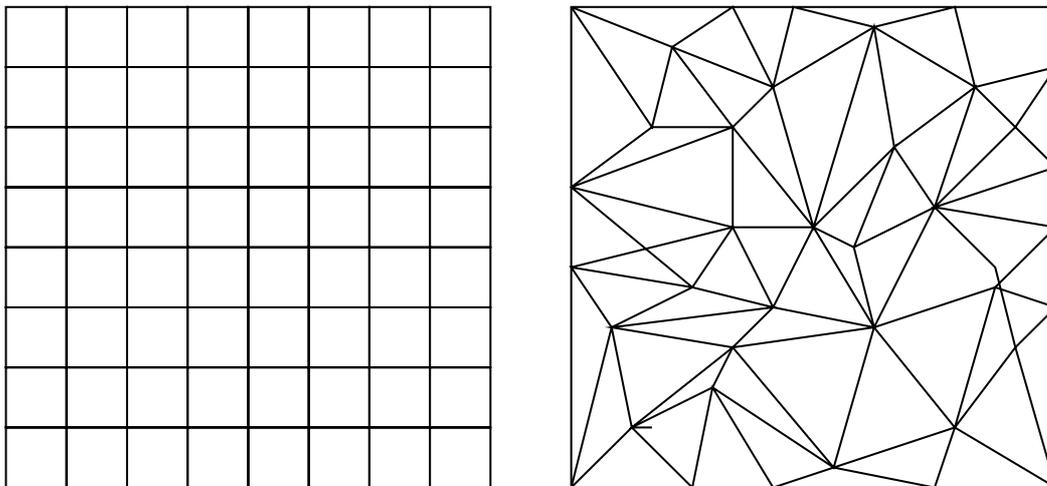


FIG. 2.4 – Deux grilles d’échantillonnage. Gauche : régulière. Droite : irrégulière. Dans le premier cas, chaque point d’échantillonnage a le même nombre de voisins, situés à égale distance les uns des autres. Dans le second cas, il faut à chaque fois déterminer dynamiquement le voisinage d’un sommet.

La relation d’Euler relie la caractéristique d’Euler-Poincaré aux caractéristiques topologiques de la surface :

$$\chi(\mathcal{S}) = N - a + f = 2(c - g) - b. \quad (2.7)$$

où g est le genre de la surface, c le nombre de composantes connexes, et b le nombre de bords.

Une surface triangulée est dite une *variété* si toutes ses arêtes sont incidentes à deux facettes exactement, et si tout sommet possède un voisinage homéomorphe à un disque. Une surface triangulée est dite variété avec bords s’il s’agit d’une variété partout sauf pour un ou plusieurs cycles disjoints d’arêtes incidentes à une seule face chacune. Ces arêtes sont appelées arêtes de bord, et leurs points extrémaux ont un voisinage homéomorphe à un demi-disque.

2.3.2 Triangulation de Delaunay

Soit \mathcal{V} un ensemble de sites du plan. On appelle simplexe de Delaunay tout simplexe de dimension n p_0, \dots, p_n ($p_i \in \mathcal{V}$) tel qu’il existe une boule passant par p_0, \dots, p_n ne contenant pas de point de \mathcal{V} en son intérieur. On appelle triangulation de Delaunay le complexe composé des simplexes de Delaunay de \mathcal{V} . Si nous appelons T une telle triangulation, nous pouvons calculer sa granularité : à chaque triangle t de T on associe le rayon r_t du plus petit cercle contenant t , et on appelle grain de T la grandeur :

$$G(T) = \max_{t \in T} r_t. \quad (2.8)$$

On sait en outre (voir [11] pour les détails) que parmi toutes les triangulations T d’un ensemble de points P du plan, les triangulations de Delaunay de P sont celles qui ont le grain le plus fin.

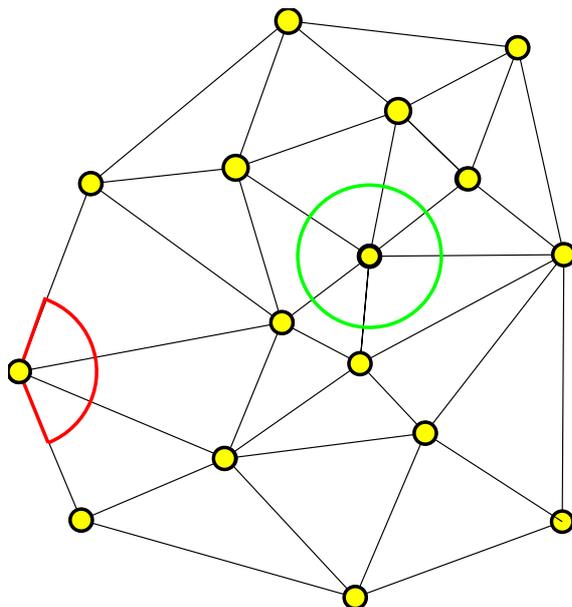


FIG. 2.5 – Variété avec bords : un sommet à l’intérieur du maillage à un voisinage homéomorphe à un disque (vert), au contraire d’un point appartenant à un bord (rouge).

On peut également souhaiter définir la finesse d’une triangulation. Soit T une triangulation d’un ensemble \mathcal{V} de n points du plan. On définit la finesse de T comme étant le vecteur $Q(T) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{f'})$, où les α_i sont les angles des f triangles de T classés par ordre lexicographique. Ces angles sont bien sûr en nombre $f' = 3 \times f$. La finesse sert également à caractériser les triangulations de Delaunay, car la triangulation qui maximise la finesse selon l’ordre croissant est une triangulation de Delaunay.

Il existe également une version tridimensionnelle volumique de la triangulation de Delaunay, appelée tétraédrisation de Delaunay. Toutefois, pour les maillages surfaciques tridimensionnels, on essaiera souvent de rester dans une représentation bidimensionnelle. Pour cela, on procèdera si possible à une paramétrisation du maillage si celui-ci contient au moins un bord. La triangulation de Delaunay peut ainsi avoir lieu dans l’espace paramétrique, pour ensuite calquer la triangulation obtenue dans le plongement 3D.

2.3.3 L’algorithme *Marching Cubes*

Une méthode pour générer une première triangulation à partir d’un nuage de points totalement non structurée est l’algorithme *Marching Cubes* [51]. La boîte englobante du nuage est divisée en voxels (des cubes), de plus en plus petits au fur et à mesure de la précision demandée.

Si l’on dispose d’une fonction capable de dire si tel point est à l’intérieur ou à l’extérieur de la surface fermée, l’algorithme regarde chaque sommet des voxels et détermine s’il est à l’intérieur ou à l’extérieur de la surface fermée. En pratique, cela se fait par un inventaire des configurations possibles. Pour un voxel, cela fait $2^8 = 256$ combinaisons possibles. Toutefois, en tenant compte de configurations équivalentes qui se déduisent l’une de l’autre, on descend

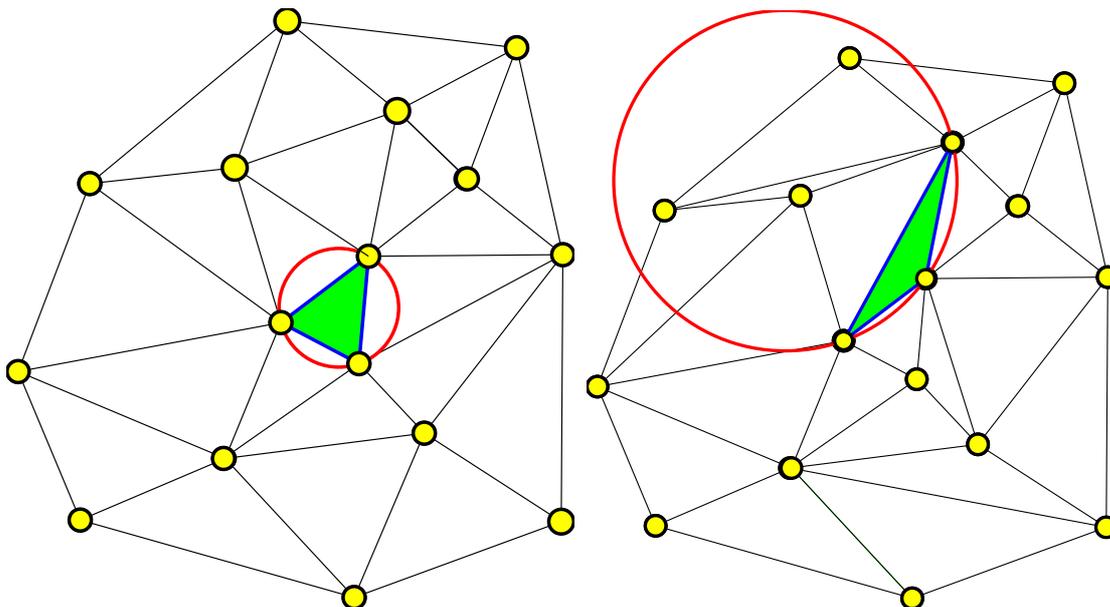


FIG. 2.6 – Le même ensemble de points maillés avec une triangulation de Delaunay (à gauche), et avec une triangulation quelconque (à droite). Le simplexe vert de gauche est un simplexe de Delaunay, pas celui de droite (la boule passant par les sites est représentée en rouge), elle contient d’autres sommets que ceux du simplexe inscrit.

à 15 configurations canoniques. Ces doublons se déduisent en :

- opérant une rotation autour d’un des trois axes principaux du voxel ;
- opérant une symétrie de la surface par rapport à l’un des trois axes principaux ;
- inversant l’état des sommets du voxel et le sens des normales aux triangles.

Ainsi, en fonction de la configuration canonique à laquelle se ramène le voxel considéré, on déduit la triangulation correspondante. En réduisant de plus en plus la taille des voxels, on obtient un maillage qui s’approche de plus en plus de la surface. L’algorithme fournit en outre une manière de se déplacer de voxels en voxel qui permet de suivre la surface.

Un inconvénient de cet algorithme est qu’il a tendance à produire rapidement une masse très volumineuse de données. Toutefois, il est utilisé pour extraire une première connexité d’un nuage de points denses. On peut ensuite s’adonner à la gamme des pré-traitements : lissage, filtrage topologique, remaillage, simplification, etc. L’acquisition de données 3D n’est pas un processus simple, et la création d’un maillage correct l’est sans doute encore moins.

2.4 Paramétrisation des surfaces triangulées

Une surface peut être vue comme une variété riemannienne (i.e : munie d’une métrique) bidimensionnelle plongée dans l’espace euclidien tridimensionnel. On souhaite généralement travailler dans un espace de même dimension que la variété. C’est pourquoi on a développé des techniques dites de paramétrisation, destinées à décrire la surface par un jeu de deux paramètres. La paramétrisation est au centre de beaucoup de problèmes en informatique

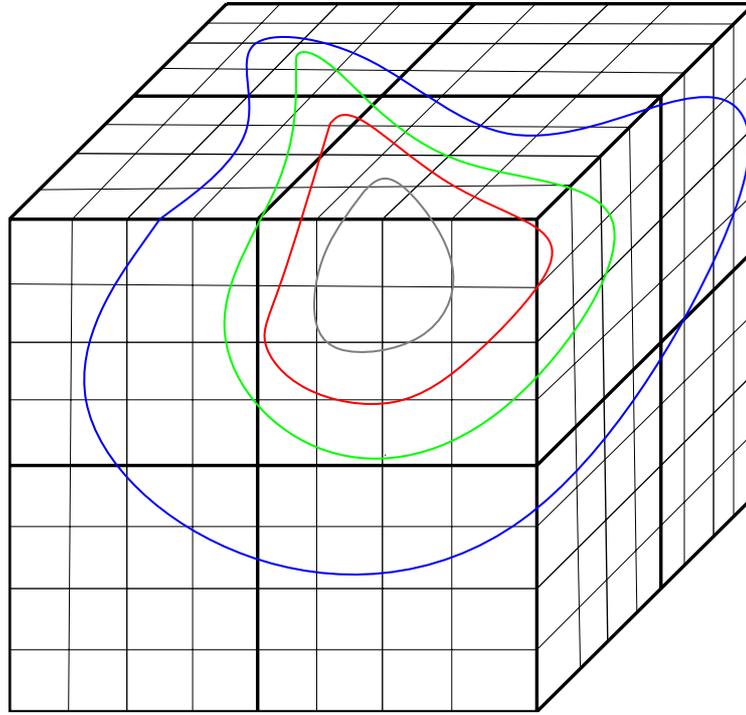


FIG. 2.7 – Découpage de la boîte englobante en voxels de plus en plus fins dans l’algorithme *Marching Cubes*.

graphique : plaquage de texture, remaillage, simulation, etc. Effectuer une paramétrisation dépend de la topologie de la surface. Nous décrivons ci-dessous diverses paramétrisations avec leurs propriétés. Nous nous concentrons sur les paramétrisations des surfaces 3D triangulées.

2.4.1 Définition

Une paramétrisation P d’une variété triangulée avec bords S est une triangulation dans le plan paramétrique (u, v) isomorphe au graphe de connexité de S . Chaque sommet 3D $p_i \in \mathcal{V}$ se voit associer son image 2D P_i par paramétrisation :

$$P(u, v) = \begin{pmatrix} x_S(u, v) \\ y_S(u, v) \\ z_S(u, v) \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

On peut donc regarder un maillage de différentes manières : suivant son graphe de connexité, sa représentation 3D, ou encore sa paramétrisation. La première information permet les calculs topologiques, la seconde associe la géométrie, et la troisième permet d’effectuer dans le plan 2D des calculs de distance en rapport avec la métrique du maillage 3D. Les paramétrisations que nous discutons ici sont moins générales que celles de [67] (qui ne sont pas limitées par la topologie), mais ce sont celles qui demeurent les plus employées du fait de

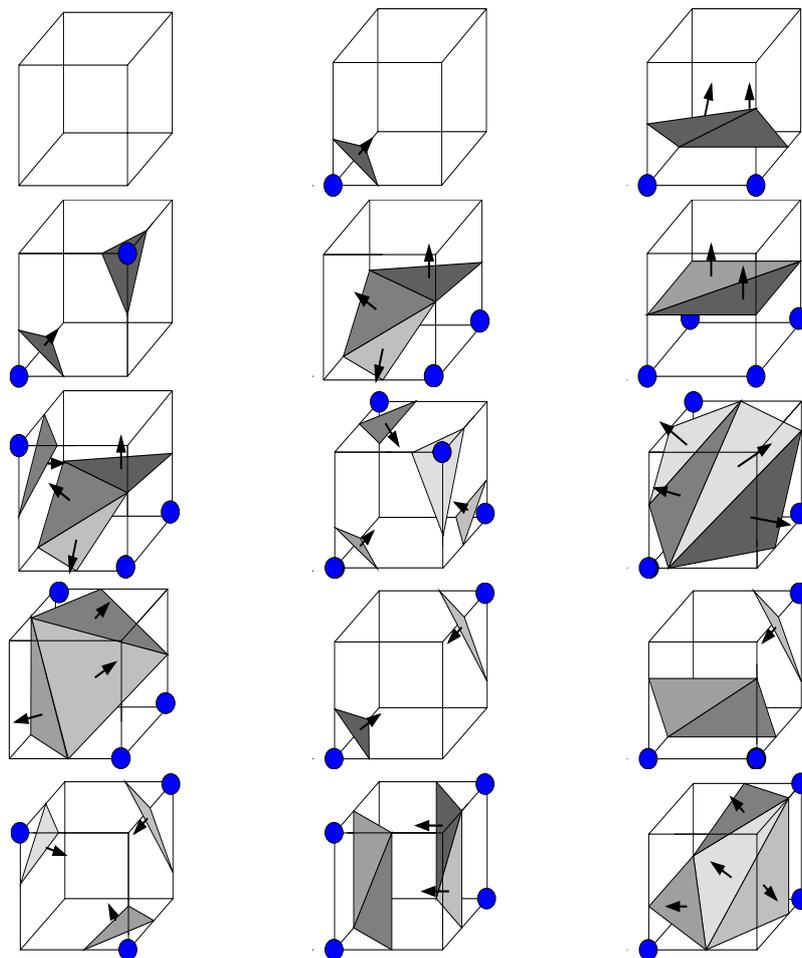


FIG. 2.8 – Les 15 configurations canoniques de l’algorithme *Marching Cubes*. Les sommets des voxels à l’intérieur de la surface sont figurés par des sphères bleues (lorsqu’elles sont visibles). Les normales aux triangles sont figurées lorsqu’elles sont visibles.

leur relative facilité d’implantation. Pour nous, une paramétrisation P est donc une triangulation plane isomorphe au graphe de connexité \mathcal{E} du maillage \mathcal{S} . Comme nous nous intéressons aux variétés avec bord, il faut encore savoir comment sont fixés les bords dans la paramétrisation. Deux cas sont possibles : soit on fixe arbitrairement les sommets du bord sur le périmètre d’un convexe du plan, soit au contraire on laisse les bords libres (deux points seulement du bord sont fixés). Nous donnons ici une description des deux principaux types de paramétrisation, ainsi que deux exemples.

Nous précisons ici que nous aurons besoin au chapitre 6 d’utiliser une paramétrisation définie sur une variété avec bord. Toutes celles que nous présentons ici ne pourront pas nous être utiles. En effet, le chapitre 6 envisage la transmission progressive de la géométrie tatouée. Nous verrons que l’encodeur et le décodeur ont besoin de se synchroniser sur la même paramétrisation, dépendante du maillage, avant toute opération d’encodage ou de décodage de la géométrie. Du seul point de vue du décodeur, on ne peut donc pas se servir

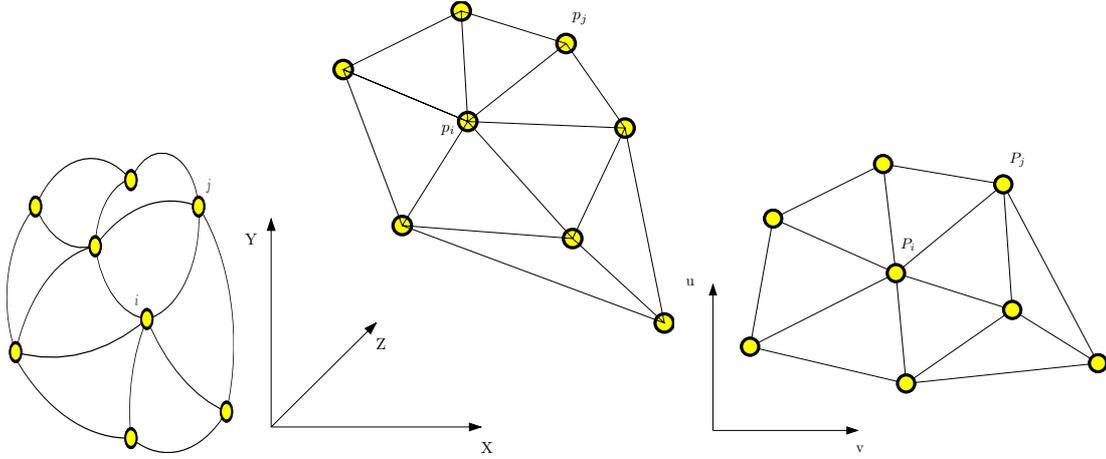


FIG. 2.9 – Trois manières de regarder un maillage d’une variété avec bords : son graphe de connexité, sa représentation spatiale, sa paramétrisation.

de l’information géométrique pour établir la paramétrisation. Cette remarque prendra tout son sens par la suite. Nous précisons à chacune des paramétrisations que nous présentons si elle pourra nous être utile (i.e : fait-elle appel ou non à l’information géométrique du maillage).

2.4.2 Paramétrisation harmonique

Lorsque l’on effectue une paramétrisation, il se produit inmanquablement une distorsion des longueurs relatives des arêtes (ce problème est discuté dans [13]). La paramétrisation qui minimise cette distorsion est qualifiée d’harmonique [22, 23]. Une fois le bord fixé, la paramétrisation harmonique existe et est unique et continue. Malheureusement, trouver exactement la paramétrisation harmonique nécessite de résoudre un système d’équations différentielles partielles [23]. Pour des raisons de calcul, on cherche plutôt à en calculer une approximation [21]. Soit P_h une telle approximation de paramétrisation harmonique. Nous obtiendrons P_h en assimilant chaque arête à un ressort dont nous donnons la constante de raideur, et en minimisant itérativement l’énergie de ce système de ressorts (au début du processus, les points sont jetés au hasard sur l’espace paramétrique, sauf les points du bord qui sont fixés une fois pour toute). Soit E_{harm} l’énergie d’un tel système de ressorts associé à la paramétrisation P . Cette énergie est à minimiser dans l’espace paramétrique en fonction de mesures prises sur le maillage [21] :

$$E_{harm}(P) = \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}} \kappa_{i,j} \|P_i - P_j\|^2, \quad (2.10)$$

où $\kappa_{i,j}$ sont les constantes de raideur des ressorts. En appelant $L_{i,j}$ la longueur de l’arête $\{i, j\}$ sur le maillage et $A(i, j, k)$ l’aire de la facette $\{i, j, k\}$ sur le maillage, les constantes de raideur sont calculées comme suit pour une arête $\{i, j\}$ commune aux facettes $\{i, j, k_1\}$ et $\{i, j, k_2\}$ (si l’expression suivante concerne une arête appartenant au bord, elle ne contient

qu'un seul terme) :

$$\kappa_{i,j} = \frac{L_{i,k_1}^2 + L_{j,k_1}^2 + L_{i,j}^2}{A(i,j,k_1)} + \frac{L_{i,k_2}^2 + L_{j,k_2}^2 + L_{i,j}^2}{A(i,j,k_2)}. \quad (2.11)$$

Par définition :

$$P_h = \arg \min_P E_{harm}(P). \quad (2.12)$$

Cette paramétrisation ne pourra manifestement pas nous être utile par la suite car les poids $\kappa_{i,j}$ sont fonction de mesures géométriques prises sur le maillage.

2.4.3 Paramétrisation barycentrique de Tutte

La première tentative pour proposer une paramétrisation vient de Tutte [75], qui place chaque point de la paramétrisation au barycentre (paramétrique) de ses voisins. Soit P_i le point de l'espace paramétrique correspondant au point p_i du maillage 3D. Nous cherchons une paramétrisation telle que :

$$P_i = \sum_{P_j \in P_i^*} w_{ij} P_j, \quad (2.13)$$

avec w_{ij} constant pour $p_j \in p_i^*$ et :

$$\sum_j w_{ij} = 1. \quad (2.14)$$

La paramétrisation de Tutte propose donc de placer P_i comme suit :

$$w_{ij} = \frac{1}{d_{P_i}} \quad \forall j \in P_i^*, \quad (2.15)$$

où d_{P_i} représente la valence de P_i . On remarque au passage que l'on se sert bien des propriétés de voisinage du graphe de connexité, sans les modifier (nous ne faisons que lire des valences), garantissant ainsi l'isomorphie. Nous illustrons cette paramétrisation dans la Fig. 2.10. Cette paramétrisation présente la propriété de minimiser la somme des longueurs des arêtes au carré dans l'espace paramétrique [75]. La paramétrisation barycentrique de Tutte est donc une paramétrisation harmonique avec $\kappa_{i,j} = 1$. On l'obtient de manière itérative en appliquant la transformation Eq. 2.13 jusqu'à convergence.

En outre, comme nous l'avons vu, strictement aucune grandeur géométrique n'entre en compte dans le calcul de cette paramétrisation. Nous pourrions donc l'utiliser par la suite en vue de synchroniser l'encodeur et le décodeur uniquement à l'aide d'information de connexité, sans information géométrique.

2.4.4 Paramétrisation conforme

Une paramétrisation conforme tend quant à elle à préserver localement les angles. Elle s'obtient par minimisation de l'énergie de Dirichlet. On note P_c une telle paramétrisation conforme. Dans [61], on définit l'énergie de Dirichlet d'une triangulation *orientée* par :

$$E_D(P) = \sum_{i=1}^N \sum_{j \in i^*} \cot \alpha_{i,j} \|P_i - P_j\|^2. \quad (2.16)$$

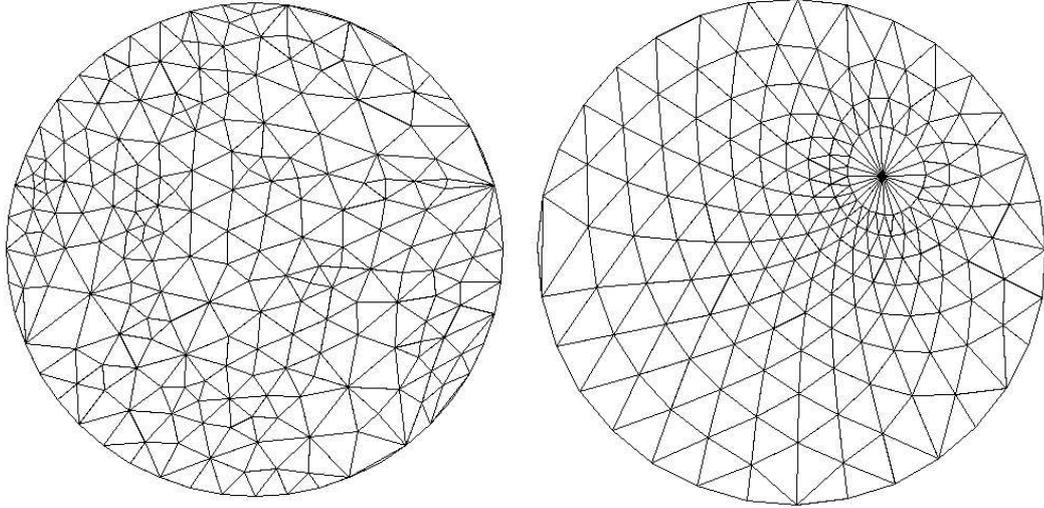


FIG. 2.10 – Exemples de paramétrisation barycentrique de Tutte : tous les points de l'espace paramétrique sont au barycentre de leurs voisins. Le bord est fixé : tous ses points ont été équirépartis sur le cercle unité. A droite, on a paramétrisé une calotte d'une sphère régulièrement échantillonnée (on reconnaît le pôle de forte valence en haut à droite.)

La paramétrisation P_c est donnée par :

$$P_c = \arg \min_P E_D(P). \quad (2.17)$$

Dans l'expression de l'énergie de Dirichlet, l'angle $\alpha_{i,j}$ est pris à gauche sur le maillage (voir Fig. 2.11).

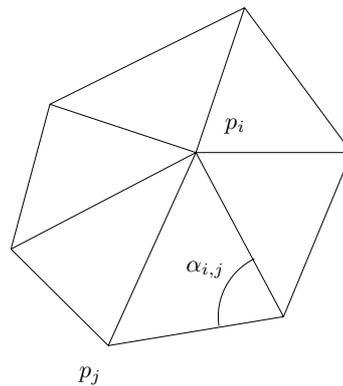


FIG. 2.11 – Définition de l'angle $\alpha_{i,j}$ pour une paramétrisation conforme.

Là encore, nous ne pourrons pas utiliser cette paramétrisation dans la suite. Le problème porte ici sur l'angle $\alpha_{i,j}$ qui ne serait pas encore connu au décodeur.

2.4.5 Paramétrisation de Floater

Floater [28] a proposé une autre manière de trouver les poids w de la paramétrisation de Tutte, qui place également un point P à l'intérieur d'un polygone convexe composé de ses voisins. Pour chaque point P de la paramétrisation, on trace la ligne qui le relie à un de ses voisins P_l . Cette ligne rencontre le polygone formant le voisinage de P en intersectant l'arête $P_{r(l)}P_{r(l)+1}$ (voir Fig. 2.12).

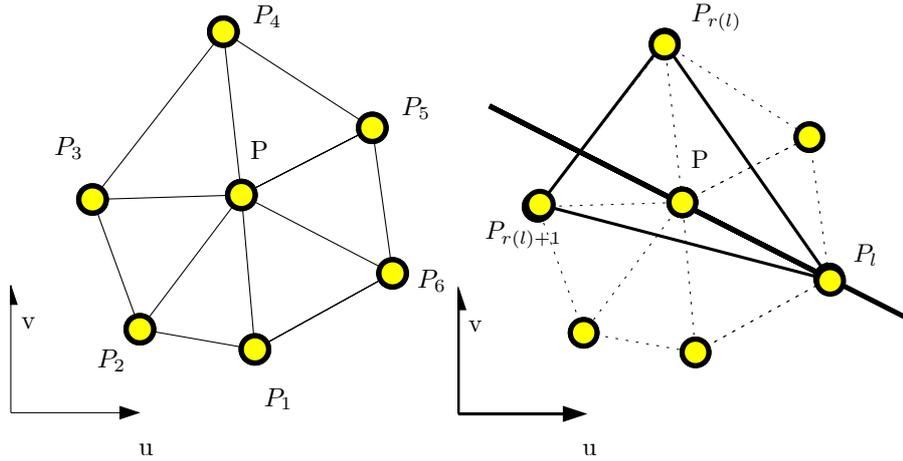


FIG. 2.12 – Paramétrisation de Floater : recherche du polygone convexe $P_l P_{r(l)} P_{r(l)+1}$.

On peut alors trouver un triplet $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ tel que :

$$\begin{cases} P = \delta_1 P_l + \delta_2 P_{r(l)} + \delta_3 P_{r(l)+1}, \\ \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1. \end{cases} \quad (2.18)$$

On définit alors les grandeurs $\mu_{k,l}$ par :

$$\mu_{k,l} = \begin{cases} \mu_{l,l} = \delta_1, \\ \mu_{r(l),l} = \delta_2, \\ \mu_{r(l)+1,l} = \delta_3, \\ \mu_{k,l} = 0 \text{ sinon.} \end{cases} \quad (2.19)$$

Finalement, les poids de la paramétrisation sont définis par :

$$w_{ij} = \frac{1}{d_{P_i}} \sum_{P_l \in P_i^*} \mu_{j,l}. \quad (2.20)$$

On vérifie bien que $\sum_j w_{i,j} = 1$. Cette paramétrisation a été appelée *shape-preserving* car elle tend à conserver localement les angles.

Nous aurions pu utiliser cette paramétrisation, mais nous avons souhaité garder le maximum de points communs avec les méthodes auxquelles nous souhaitons nous comparer. Nous utiliserons en réalité une paramétrisation barycentrique de Tutte, que nous n'avons pas cherché à améliorer.

2.4.6 Découpe en disque topologique

Les paramétrisations que nous venons de présenter requièrent une variété avec bord pour être valides (homéomorphes à un disque). Ce n'est en pratique pas souvent le cas des surfaces rencontrées, qui peuvent être de genre quelconque. Toutefois, il est toujours possible de découper une surface triangulée pour en faire un disque. Sur le bord, on trouvera bien sûr plusieurs fois chaque point. On appelle le bord issu d'une telle découpe le schéma polygonal de la surface.

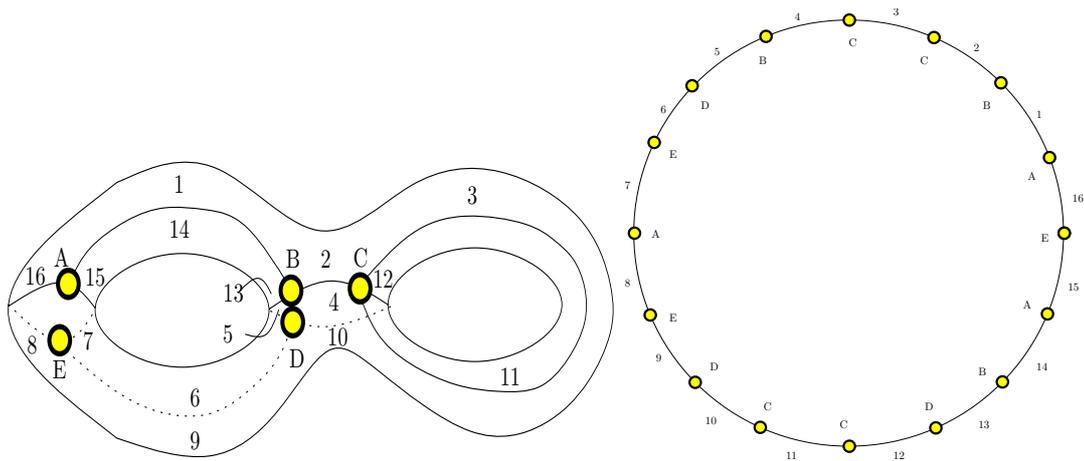


FIG. 2.13 – Découpe d'une surface en disque topologique. A droite : une surface de genre 2 (double tore). A gauche : son schéma polygonal.

Trouver le schéma polygonal d'une surface triangulée n'est pas trivial. Une surface de genre g nécessite de trouver $2g$ cycles d'arêtes dans le graphe de connexité partageant deux à deux un même point (AEA, BCDC, ABDEA, CC dans notre exemple). Ainsi, en coupant suivant les arêtes formant les cycles, on obtient un disque topologique. Fondés sur une simplification des idées présentées dans [77], F. Lazarus [48] a présenté deux algorithmes produisant un tel schéma polygonal. Une méthode permettant de minimiser la somme des longueurs des arêtes des cycles est présentée dans [24]. Lors de calculs opérés sur un tel découpage de la surface, il faut veiller à ce que les effets de bords ne viennent pas trop perturber la reconstruction de la surface lorsque l'on repasse dans le plongement 3D.

2.5 Structures de données associées

Nous expliquons à présent de quelle manière peuvent être décrits les maillages en machine. Il s'agit essentiellement de disposer d'un codage de la connexité de manière à accéder rapidement aux points formant telle facette ou au voisinage d'un point par exemple. Nous présentons le codage naïf de la connexité, qui n'est autre que la transcription en machine du codage brut dans un format VRML par exemple. Enfin nous présentons la structure half-edge qui, en dépit du surcoût de codage qu'elle introduit, permet un accès beaucoup plus rapide aux informations pertinentes de connexité.

2.5.1 Représentation brute

Le codage brut de la connexité repose sur le stockage en mémoire d'un tableau de description des facettes. Chaque cellule du tableau comporte un nombre d'éléments dépendant du nombre de points formant la facette dans le cas général, mais constant et égal à trois dans le cas de surfaces triangulées. Une telle cellule débute avec le nombre de points dans la facette, et énumère ensuite la liste des points concernés. Ce codage brut est très compact mais ne

T_1	$p_{T_1}^1$	$p_{T_1}^2$	$p_{T_1}^3$
T_2	$p_{T_2}^1$
...	$p_{T_{f-1}}^3$
T_f	$p_{T_f}^1$	$p_{T_f}^2$	$p_{T_f}^3$

FIG. 2.14 – Codage brut de la connexité d'un maillage triangulé de f facettes en machine. Chaque cellule correspond à une facette et est constituée du nombre de points qui la constituent, et de la liste de ses points.

permet pas d'effectuer rapidement des opérations de recherche complexe sur la connexité. Par exemple, retrouver le voisinage d'un point avec cette structure nous condamne à parcourir le tableau dans son ensemble. La complexité est donc en $O(f)$ si le maillage contient f facettes. Le principal défaut de cette structure de données est donc de ne pas disposer d'information d'adjacence sur les facettes.

Cette représentation est celle utilisée dans le codage des maillages polygonaux dans le format VRML. Nous donnons ci-dessous un exemple d'un tel codage pour un tétraèdre. On constate au passage, et cette remarque sera capitale en codage de source, que l'information de connexité est très redondante : chaque index de sommet est écrit trois fois.

2.5.2 Représentation en demi-arête

Dans cette représentation, chaque arête est constituée de deux structures de demi-arête : une par orientation possible de l'arête. Une demi-arête est une structure comprenant le point de départ sur l'arête, le point terminal, et la facette à laquelle appartient cette demi-arête (voir Fig. 2.16). Toutes les demi-arêtes d'une même facette sont chaînées entre elles dans le sens horaire (ou anti-horaire). On peut ainsi circuler sur les facettes. La complexité de l'obtention du voisinage d'un point p est donc en $O(d_p)$ pour une 2-variété. Cette structure ne gère malheureusement pas les surfaces non-orientables.

```

VRML V2.0 utf8
Shape {
  geometry IndexedFaceSet {
    coord Coordinate {
      point [
        0.94 0.00 -0.33 ,
        -0.47 0.81 -0.33 ,
        -0.47 -0.81 -0.33 ,
        0.00 0.00 1.00 ,
      ]
    }
    coordIndex [
      2, 1, 0, -1,
      3, 2, 0, -1,
      1, 3, 0, -1,
      2, 3, 1, -1,
    ]
  }
}

```

FIG. 2.15 – Codage d’un tétraèdre dans la norme VRML2.0 : l’information `coordIndex` codant la connexité est très redondante car chaque index de point est répété trois fois (exemple tiré de [71]).

2.5.3 Représentation *winged-edge*

La structure en demi-arête est limitée aux surfaces orientables, ce qui peut parfois constituer une limitation. Afin de les pallier, la structure *winged-edge* propose que chaque arête pointe non seulement vers ses deux points extrémaux et ses deux facettes incidentes, mais aussi vers les quatre autres arêtes appartenant aux deux facettes incidentes (voir Fig. 2.17). Cette structure de données permet de s’affranchir de la contrainte d’orientabilité de la surface mais au prix de certaines opérations élémentaires plus complexes.

Il existe encore une dernière structure de données, appelée *radial-edge*, qui peut représenter des surfaces de topologie arbitraire. Mais sa complexité impose de seulement la mentionner sans l’aborder plus avant. Le lecteur se reportera à [80] pour une description détaillée.

2.6 Attributs supplémentaires

Jusqu’à présent, nous n’avons modélisé que la géométrie des maillages et leur connexité. Pourtant, un maillage peut faire appel à d’autres données, annexes. Ces attributs peuvent être classés suivant qu’ils se rapportent à des point ou à des facettes.

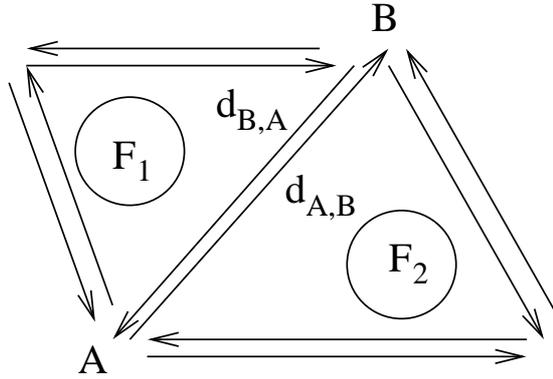


FIG. 2.16 – Structure de données en demi-arête : l’arête AB est constituée des deux demi-arêtes $d_{A,B}$ et $d_{B,A}$ pointant chacune à la fois sur la facette à laquelle elle appartient (F_2 pour $d_{A,B}$ et F_1 pour $d_{B,A}$), et sur la demi-arête suivante de sa facette (dans le sens horaire sur la figure).

2.6.1 Grandeurs différentielles locales

Afin de modéliser convenablement l’interaction lumière-matière pour l’affichage et le rendu, on a généralement besoin de calculer les normales locales en chaque point, ou en chaque facette. On peut encore avoir besoin d’estimer le flot de courbure de la surface. Il s’agit ici de grandeurs différentielles du premier et du second ordre.

En chaque point, la surface peut être approchée par son plan tangent, de normale \vec{n} . La manière dont se plie la surface en ce point est décrite par la courbure en chaque direction. Pour chaque vecteur \vec{e}_θ de direction θ , la courbure normale $\kappa^N(\theta)$ au point considéré est la courbure de la courbe appartenant à la fois à la surface et au plan contenant \vec{n} et \vec{e}_θ . Les deux courbures principales κ_1 et κ_2 (de directions principales respectives \vec{e}_1 et \vec{e}_2) sont les valeurs extrémales de $\kappa^N(\theta)$ (voir Fig. 2.18). La courbure moyenne κ_H est définie comme la moyenne des courbures normales :

$$\kappa_H = \int_0^{2\pi} \kappa^N(\theta) d\theta. \quad (2.21)$$

On peut exprimer la courbure normale en n’importe quelle direction en fonction des deux courbures principales :

$$\kappa^N(\theta) = \kappa_2 \sin^2(\theta) + \kappa_1 \cos^2(\theta). \quad (2.22)$$

On en déduit que :

$$\kappa_H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}. \quad (2.23)$$

Pour terminer, on définit la courbure gaussienne comme le produit des deux courbures principales :

$$\kappa_G = \kappa_1 \kappa_2. \quad (2.24)$$

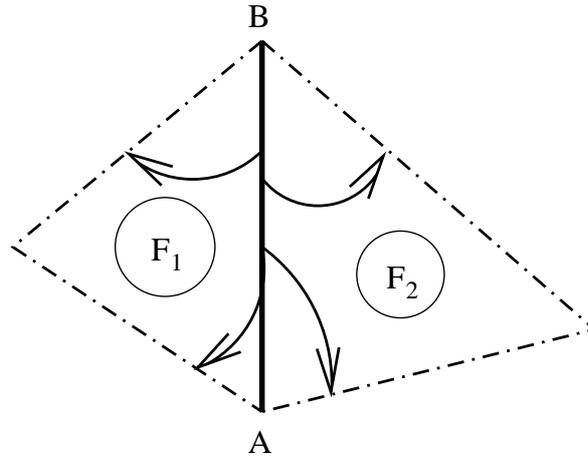


FIG. 2.17 – Structure de données *winged-edge* : l'arête AB pointe sur les points A et B , sur les facettes F_1 et F_2 , ainsi que sur les quatre arêtes en pointillés.

2.6.2 Textures

Il arrive généralement qu'un maillage soit la représentation d'un objet réel, disposant d'un aspect propre à la matière qui le compose. Il s'agit ici de données photogrammétriques, que l'on appelle textures. Une texture est codée sous forme d'une image attachée à chacune des facettes de l'objet. Afin de plaquer la texture sur l'objet, on a besoin de paramétrer l'objet afin de calculer ses coordonnées de texture. Une fois l'objet paramétrisé, on vient superposer la texture sur la paramétrisation pour ensuite revenir dans le plongement.

On stocke donc le résultat d'une paramétrisation (qui forme les coordonnées de texture), et la texture elle-même constituée de pixel est souvent stockée sous forme d'un fichier séparé. En effet, ce sont les coordonnées de texture les plus importantes : elles permettent de plaquer n'importe quelle image sur la surface sans nécessiter de coûteux calculs (la paramétrisation ayant été effectuée une fois pour toutes).

2.6.3 Transparence

Dans le domaine biomédical ou de la CAO, où la superposition 3D de plusieurs maillages est nécessaire à la bonne compréhension de leur interaction spatiale, il est souvent utile de pouvoir rendre certaines parties des maillages transparentes. On attache alors aux facettes un facteur de transparence qui sera pris en compte matériellement par le dispositif d'affichage. Il est à noter que l'évolution des matériels d'affichage courants ne tend pas vers la prise en charge de maillages de plus en plus volumineux, mais au contraire vers l'accélération des opérations visant à effectuer les plaquages de texture et le rendu de la transparence, de manière à proposer un rendu plus réaliste à un moindre coût.

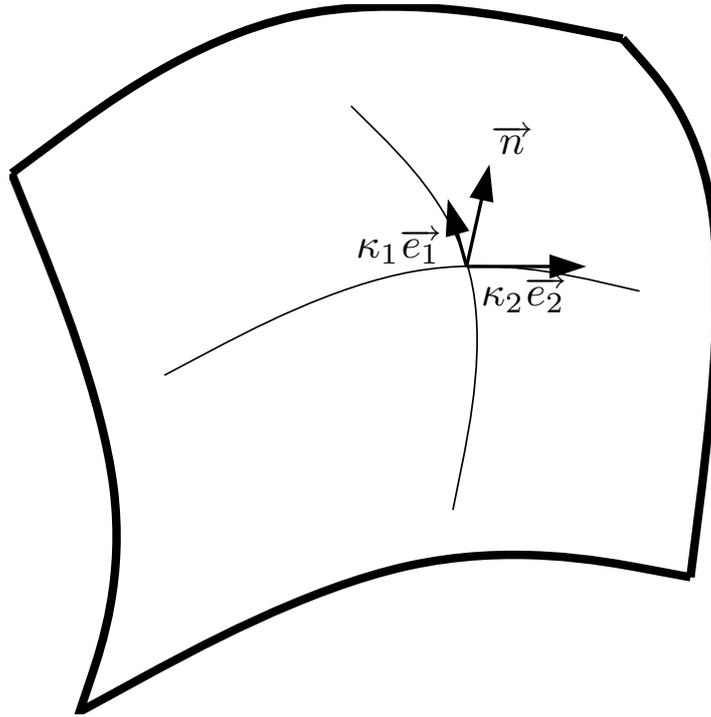


FIG. 2.18 – Propriétés différentielles locales du premier ordre (normale locale) et du second ordre (courbures et directions principales).

2.6.4 Réflectance

Lorsqu'on scanne un objet, on le fait sous certaines conditions particulières de luminosité. Néanmoins, on souhaite pouvoir être capable de modéliser fidèlement le comportement de l'objet dans n'importe quelles conditions d'éclairage. Pour cela, on souhaite accéder aux propriétés locales de réflectance du matériau de l'objet. On cherche alors un modèle de réflectance, qui doit permettre d'associer à chaque élément de surface de l'objet une fonction de transfert entre énergie incidente et réfléchi, pour chaque longueur d'onde du spectre à étudier. On trouve dans [54] un modèle appelé BRDF (pour Bidirectional Reflectance Distribution Function).

Ce modèle est défini en chaque élément de surface comme le rapport de la radiance réfléchi sur l'irradiance incidente. Son unité est l'angle solide inverse :

$$f_r(\theta_i, \rho_i, \theta_r, \rho_r) = \frac{dL_r(\theta_r, \rho_r)}{dE_i(\theta_i, \rho_i)}, \quad (2.25)$$

où les directions incidente (θ_i, ρ_i) et réfléchi (θ_r, ρ_r) sont exprimées par rapport à la normale à l'élément de surface considéré.

2.7 Modèles de distance entre maillages

Il faut noter par avance qu'il n'existe aucune paramétrisation universelle des surfaces 2D de l'espace 3D (comme par exemple les coordonnées cylindriques pour les objets à description radiale ou les coordonnées sphériques pour les objets à description centrale). Par suite, aucune théorie de traitement linéaire de la géométrie n'a encore vu le jour, comme l'analyse spectrale des fonctions d'une variable. Une des conséquences de cet état de fait est qu'il n'existe pas de rapport signal à bruit entre deux signaux surfaciques 3D. Qu'il s'agisse de compresser la géométrie d'un maillage (codage de source) ou bien de la tatouer, on souhaite disposer d'une mesure permettant d'évaluer la distorsion introduite par le traitement considéré. Du fait de l'absence de SNR , il faut adopter une autre mesure. Nous examinons tout d'abord les principales solutions proposées pour comparer des maillages.

Nous désignons par \mathcal{S} et \mathcal{S}' les deux maillages dont on veut mesurer la distance.

2.7.1 Distance de Hausdorff et distance moyenne

Nous présentons ici deux distances, l'une fondée sur une norme L_∞ , et l'autre sur une norme L_2 . Chacune de ces distances permet de quantifier la différence entre deux maillages quelconques même s'ils n'ont pas le même nombre de points.

Distance de Hausdorff

La distance de Hausdorff est définie entre chaque point de \mathcal{S} et tous les points de \mathcal{S}' . Dans un premier temps, il faut définir la distance d'un point à un maillage. Soit p un point, on définit la distance $e(p, \mathcal{S})$ à un maillage \mathcal{S} par :

$$e(p, \mathcal{S}) = \min_{p' \in \mathcal{V}} d(p, p'), \quad (2.26)$$

où $d(p, p')$ représente la distance euclidienne entre les points p et p' . On peut alors définir la distance de Hausdorff unilatère $E(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ comme :

$$E(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = \max_{p \in \mathcal{V}} e(p, \mathcal{S}'). \quad (2.27)$$

Cette distance est qualifiée d'unilatère car on a en général : $E(\mathcal{S}, \mathcal{S}') \neq E(\mathcal{S}', \mathcal{S})$. Afin d'obtenir une distance (donc symétrique), on définit la distance de Hausdorff :

$$E_H(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = \max\{E(\mathcal{S}, \mathcal{S}'), E(\mathcal{S}', \mathcal{S})\}. \quad (2.28)$$

Toutefois, pour des raisons de temps de calcul, on emploie plus souvent la distance de Hausdorff unilatère.

Distance moyenne

Si l'on veut une distance exprimant la distance quadratique moyenne entre les deux surfaces (l'équivalent de l'écart quadratique moyen des fonctions d'une variable), on peut adopter le choix suivant, appelé distance moyenne. Le calcul de cette distance repose sur un

rééchantillonnage des objets, pour autant que les maillages soient uniformément échantillonnés :

$$E_m(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = \frac{1}{\text{Aire}(\mathcal{S})} \sum_{\mathcal{S}} e(p, \mathcal{S}') d\mathcal{S}. \quad (2.29)$$

2.7.2 Laplacien géométrique

Le laplacien géométrique a été utilisé pour la première fois dans des travaux sur la compression spectrale de la géométrie d'objets 3D [42], afin d'introduire une mesure de la régularité locale de la surface. En effet, les normes vues précédemment ne permettent pas de faire la différence entre un simple ajout de bruit sur les coordonnées des points (donnant un effet visuel extrêmement déplaisant) et une version compressée de la géométrie (où l'aspect visuel est nettement plus acceptable).

Le laplacien géométrique $GL(p)$ en un point p est défini par :

$$GL(p) = p - \frac{\sum_{p' \in p^*} d(p, p')^{-1} p'}{\sum_{p' \in p^*} d(p, p')^{-1}}. \quad (2.30)$$

Le laplacien géométrique exprime la distance entre le point et le barycentre des points qui lui sont connexes dans le maillage. Par exemple, si la surface est localement plane avec des voisins équirépartis autour de p , alors $GL(p)$ sera proche de 0.

Pour des maillages ayant même nombre de points et pour lesquels la correspondance entre points est connue, on calcule une mesure globale :

$$E_{GL}(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N d(p_i, p'_i) + \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \|GL(p_i) - GL(p'_i)\|, \quad (2.31)$$

dans laquelle on voit comment le laplacien géométrique intervient pour ajouter à la distance entre sommets une information de régularité.

2.8 Conclusion

Les maillages 3D peuvent être vus comme une grille d'échantillonnage irrégulière à la topologie quelconque sur laquelle on vient définir des coordonnées cartésiennes représentant la géométrie de l'objet. En sus, pour faciliter l'affichage et le rendu, on associe souvent aux points et/ou aux facettes les normales locales qui rendent compte de la courbure locale de l'objet. L'aspect de la matière composant l'objet est codé sous forme de texture : des images qui doivent être plaquées le plus fidèlement possible sur l'objet. Cette étape dépend de la qualité de la paramétrisation. Enfin, un maillage, suivant ses propriétés topologiques, ne nécessitera pas la même structure de données qu'un autre maillage plus simple. Pour notre part, nous avons employé la structure de données en demi-arête pour nos expérimentations.